개념원리® 문제기본서

RPM

수학(상)

정답과 풀이

01 | 다항식의 연산

교과서 문제 정/복/하/기

본문 7쪽, 9쪽

0001 답 (1) $\boldsymbol{3x^3y^2+2x^2y-5xy^3+y-7}$
(2) $\boldsymbol{-7+(2x^2+1)y+3x^3y^2-5xy^3}$

0002 $(x^2+xy+3y^2)+(2x^2-2xy+y^2)$
$=x^2+xy+3y^2+2x^2-2xy+y^2$
$=3x^2-xy+4y^2$ 답 $\boldsymbol{3x^2-xy+4y^2}$

0003 $(3x^2+2xy-y^2)-(x^2-5xy-4y^2)$
$=3x^2+2xy-y^2-x^2+5xy+4y^2$
$=2x^2+7xy+3y^2$ 답 $\boldsymbol{2x^2+7xy+3y^2}$

0004 $(5x^2+2xy)-(xy-3y^2)+(y^2+4xy)$
$=5x^2+2xy-xy+3y^2+y^2+4xy$
$=5x^2+5xy+4y^2$ 답 $\boldsymbol{5x^2+5xy+4y^2}$

0005 (1) $A-2B=(3x^2-4xy+2y^2)-2(x^2-xy-3y^2)$
$=3x^2-4xy+2y^2-2x^2+2xy+6y^2$
$=x^2-2xy+8y^2$
(2) $3B-(4A+B)$
$=3B-4A-B=-4A+2B$
$=-4(3x^2-4xy+2y^2)+2(x^2-xy-3y^2)$
$=-12x^2+16xy-8y^2+2x^2-2xy-6y^2$
$=-10x^2+14xy-14y^2$
답 (1) $\boldsymbol{x^2-2xy+8y^2}$ (2) $\boldsymbol{-10x^2+14xy-14y^2}$

0006 (1) $A-B+C$
$=(x^3+2x^2+3)-(3x^3+x^2-x-4)+(-2x^2+x-1)$
$=x^3+2x^2+3-3x^3-x^2+x+4-2x^2+x-1$
$=-2x^3-x^2+2x+6$
(2) $2A-(B-3C)$
$=2A-B+3C$
$=2(x^3+2x^2+3)-(3x^3+x^2-x-4)+3(-2x^2+x-1)$
$=2x^3+4x^2+6-3x^3-x^2+x+4-6x^2+3x-3$
$=-x^3-3x^2+4x+7$
(3) $(A+2B)-(B-C)$
$=A+2B-B+C=A+B+C$
$=(x^3+2x^2+3)+(3x^3+x^2-x-4)+(-2x^2+x-1)$
$=x^3+2x^2+3+3x^3+x^2-x-4-2x^2+x-1$
$=4x^3+x^2-2$
답 (1) $\boldsymbol{-2x^3-x^2+2x+6}$ (2) $\boldsymbol{-x^3-3x^2+4x+7}$
(3) $\boldsymbol{4x^3+x^2-2}$

0007 $2a(a^2-3a+6)=2a^3-6a^2+12a$
답 $\boldsymbol{2a^3-6a^2+12a}$

0008 $(x+3)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+3x^2-3x+3$
$=x^3+2x^2-2x+3$
답 $\boldsymbol{x^3+2x^2-2x+3}$

0009 $(2a^2+3ab-5b^2)(a-4b)$
$=2a^3-8a^2b+3a^2b-12ab^2-5ab^2+20b^3$
$=2a^3-5a^2b-17ab^2+20b^3$
답 $\boldsymbol{2a^3-5a^2b-17ab^2+20b^3}$

0010 $(2x+5)^2=(2x)^2+2\times2x\times5+5^2$
$=4x^2+20x+25$ 답 $\boldsymbol{4x^2+20x+25}$

0011 $(3x-2)^2=(3x)^2-2\times3x\times2+2^2$
$=9x^2-12x+4$ 답 $\boldsymbol{9x^2-12x+4}$

0012 $(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-y^2$
$=9x^2-y^2$ 답 $\boldsymbol{9x^2-y^2}$

0013 $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times3$
$=x^2+5x+6$ 답 $\boldsymbol{x^2+5x+6}$

0014 $(2x+5)(3x-4)$
$=(2\times3)x^2+\{2\times(-4)+5\times3\}x+5\times(-4)$
$=6x^2+7x-20$ 답 $\boldsymbol{6x^2+7x-20}$

0015 $(2x-y-3z)^2$
$=(2x)^2+(-y)^2+(-3z)^2+2\times2x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times(-3z)+2\times(-3z)\times2x$
$=4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx$
답 $\boldsymbol{4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx}$

0016 $(x+1)^3=x^3+3\times x^2\times1+3\times x\times1^2+1^3$
$=x^3+3x^2+3x+1$
답 $\boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

0017 $(x-2y)^3=x^3-3\times x^2\times2y+3\times x\times(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
답 $\boldsymbol{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

0018 $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$ 답 $\boldsymbol{a^3+8}$

0019 $(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x)^3-1^3=27x^3-1$
답 $\boldsymbol{27x^3-1}$

0020 $(x+1)(x+2)(x+3)$

$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times2+2\times3+3\times1)x+1\times2\times3$

$=x^3+6x^2+11x+6$

답 $\boldsymbol{x^3+6x^2+11x+6}$

0021 $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a+b+1)$

$=\{a+(-b)+1\}$
$\{a^2+(-b)^2+1^2-a\times(-b)-(-b)\times1-1\times a\}$

$=a^3+(-b)^3+1^3-3\times a\times(-b)\times1$

$=a^3-b^3+3ab+1$

답 $\boldsymbol{a^3-b^3+3ab+1}$

0022 $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

$=\{(2x)^2+2x\times3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\times3y+(3y)^2\}$

$=(2x)^4+(2x)^2(3y)^2+(3y)^4$

$=16x^4+36x^2y^2+81y^4$

답 $\boldsymbol{16x^4+36x^2y^2+81y^4}$

0023 (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-2)=13$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times(-2)\times3=45$

답 (1) **13** (2) **45**

0024 (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(-4)^2+2\times3=22$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-4)^3+3\times3\times(-4)$

$=-64-36=-100$

답 (1) **22** (2) $\boldsymbol{-100}$

0025 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

답 (1) **14** (2) $\boldsymbol{\pm2\sqrt{3}}$

0026 (1) $x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=2^3-3\times(-1)\times2=14$

(2) $x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(2\sqrt{2})^3+3\times(-1)\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

답 (1) **14** (2) $\boldsymbol{10\sqrt{2}}$

0027 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9^2-2\times8=65$

답 **65**

0028

$$
\begin{array}{r}
x^2+\boxed{6}\,x \\
x-1\ \big)\ \overline{x^3+5x^2-6x+1} \\
x^3-x^2 \\
\hline
\boxed{6}\,x^2-6x \\
\boxed{6}\,x^2-\boxed{6}\,x \\
\hline
\boxed{1}
\end{array}
$$

답 (가) **6** (나) **6** (다) **6** (라) **6** (마) **1**

0029

$$
\begin{array}{r}
2x^2-2x-2 \\
2x+1\ \big)\ \overline{4x^3-2x^2-6x+1} \\
4x^3+2x^2 \\
\hline
-4x^2-6x \\
-4x^2-2x \\
\hline
-4x+1 \\
-4x-2 \\
\hline
3
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $2x^2-2x-2$, 나머지 : 3

답 몫 : $\boldsymbol{2x^2-2x-2}$, 나머지 : **3**

0030

$$
\begin{array}{r}
2x-1 \\
x^2+2x-1\ \big)\ \overline{2x^3+3x^2+5} \\
2x^3+4x^2-2x \\
\hline
-x^2+2x+5 \\
-x^2-2x+1 \\
\hline
4x+4
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $2x-1$, 나머지 : $4x+4$

답 몫 : $\boldsymbol{2x-1}$, 나머지 : $\boldsymbol{4x+4}$

0031

$$
\begin{array}{r}
3x^2+3x+1 \\
x^2-x-1\ \big)\ \overline{3x^4-5x^2-2x+1} \\
3x^4-3x^3-3x^2 \\
\hline
3x^3-2x^2-2x \\
3x^3-3x^2-3x \\
\hline
x^2+x+1 \\
x^2-x-1 \\
\hline
2x+2
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $3x^2+3x+1$, 나머지 : $2x+2$

답 몫 : $\boldsymbol{3x^2+3x+1}$, 나머지 : $\boldsymbol{2x+2}$

0032

$$
\begin{array}{r}
3x-1 \\
x^2+1\ \big)\ \overline{3x^3-x^2+4x+3} \\
3x^3+3x \\
\hline
-x^2+x+3 \\
-x^2-1 \\
\hline
x+4
\end{array}
$$

$\therefore\ 3x^3-x^2+4x+3=(x^2+1)(3x-1)+x+4$

답 풀이 참조

0033

$$
\begin{array}{r}
2x+2 \\
x^2-x-1\,\overline{)\,2x^3 \qquad +x-3} \\
\underline{2x^3-2x^2-2x} \\
2x^2+3x-3 \\
\underline{2x^2-2x-2} \\
5x-1
\end{array}
$$

$\therefore\ 2x^3+x-3=(x^2-x-1)(2x+2)+5x-1$

답 풀이 참조

0034

$$
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{2} & 1 & 4 & -5 & \boxed{3} \\
 & & \boxed{2} & 12 & 14 \\
\hline
 & 1 & 6 & \boxed{7} & \boxed{17}
\end{array}
$$

따라서 구하는 몫은 $\boxed{x^2+6x+7}$, 나머지는 $\boxed{17}$이다.

답 (가) **2** (나) **3** (다) **2** (라) **7** (마) **17** (바) $\boldsymbol{x^2+6x+7}$ (사) **17**

0035

$$
\begin{array}{c|cccc}
-2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
 & & -2 & -2 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : x^2+x+1, 나머지 : 0

답 **몫 :** $\boldsymbol{x^2+x+1}$**, 나머지 : 0**

0036

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 3 & -7 & 0 & -10 \\
 & & 9 & 6 & 18 \\
\hline
 & 3 & 2 & 6 & 8
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $3x^2+2x+6$, 나머지 : 8

답 **몫 :** $\boldsymbol{3x^2+2x+6}$**, 나머지 : 8**

0037

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{3}{2} & 2 & -1 & 1 & -9 \\
 & & 3 & 3 & 6 \\
\hline
 & 2 & 2 & 4 & -3
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : $2x^2+2x+4$, 나머지 : -3

답 **몫 :** $\boldsymbol{2x^2+2x+4}$**, 나머지 :** $\boldsymbol{-3}$

유형 익히기

본문 10~15쪽

0038 $A-2(A-2B)+C$

$=A-2A+4B+C$

$=-A+4B+C$

$=-(x^2-2xy+y^2)+4(2x^2+xy-2y^2)+(-x^2+2xy-y^2)$

$=-x^2+2xy-y^2+8x^2+4xy-8y^2-x^2+2xy-y^2$

$=6x^2+8xy-10y^2$

답 $\boldsymbol{6x^2+8xy-10y^2}$

0039 $A-2(X-B)=3A$에서

$A-2X+2B=3A,\ 2X=2B-2A$

$\therefore\ X=B-A$

$=(3x^2+3xy-y^2)-(2x^2-xy+y^2)$

$=x^2+4xy-2y^2$

답 $\boldsymbol{x^2+4xy-2y^2}$

0040 $(3x^3+x^2-x+1)\bigstar(-x^3-x^2+3x-5)$

$=(3x^3+x^2-x+1)-2(-x^3-x^2+3x-5)$

$=3x^3+x^2-x+1+2x^3+2x^2-6x+10$

$=5x^3+3x^2-7x+11$

답 ④

0041 $A+B=2x^2+3xy-5y^2$ ······ ㉠

$A-2B=8x^2-6xy-2y^2$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $3B=-6x^2+9xy-3y^2$

$\therefore\ B=-2x^2+3xy-y^2$

······ ㉮

이것을 ㉠에 대입하면

$A+(-2x^2+3xy-y^2)=2x^2+3xy-5y^2$

$\therefore\ A=4x^2-4y^2$

······ ㉯

$\therefore\ 2A+B=2(4x^2-4y^2)+(-2x^2+3xy-y^2)$

$=8x^2-8y^2-2x^2+3xy-y^2$

$=6x^2+3xy-9y^2$

즉, $a=6,\ b=3,\ c=-9$이므로

$a+b+c=0$

······ ㉰

답 **0**

단계	채점요소	배점
㉮	다항식 B 구하기	30 %
㉯	다항식 A 구하기	30 %
㉰	$a+b+c$의 값 구하기	40 %

0042 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$의 전개식에서 x^4항은

$2x\times x^3+3x^2\times 2x^2+4x^3\times 3x=2x^4+6x^4+12x^4=20x^4$

따라서 x^4의 계수는 20이다.

답 ④

0043 $(2x-y+1)(x+3y-2)$의 전개식에서 xy항은

$2x\times 3y+(-y)\times x=6xy-xy=5xy$

따라서 xy의 계수는 5이다.

답 **5**

0044 $(x^2-2x+1)(x^2+3x+k)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times k+(-2x)\times 3x+1\times x^2=kx^2-6x^2+x^2$

$=(k-5)x^2$

이때 x^2의 계수가 5이므로

$k-5=5 \qquad \therefore\ k=10$

답 **10**

0045 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$

$=(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})$

이 식의 전개식에서 x^5항은

$x\times4x^4+2x^2\times3x^3+3x^3\times2x^2+4x^4\times x$

$=4x^5+6x^5+6x^5+4x^5=20x^5$

따라서 x^5의 계수는 20이다. 답 **20**

0046 ① $(2x-1)^2=(2x)^2-2\times2x\times1+1^2$

$=4x^2-4x+1$

② $(2x+3y)^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times3y+3\times2x\times(3y)^2+(3y)^3$

$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

③ $(x-y+z)^2$

$=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times z+2\times z\times x$

$=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

④ $(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2-xy-2yz-2zx)$

$=x^3+y^3+(2z)^3-3\times x\times y\times2z$

$=x^3+y^3+8z^3-6xyz$

⑤ $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

$=\{(2x)^2+2x\times y+y^2\}\{(2x)^2-2x\times y+y^2\}$

$=(2x)^4+(2x)^2\times y^2+y^4$

$=16x^4+4x^2y^2+y^4$

따라서 다항식의 전개가 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0047 $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+2)(x^2-2x+4)\}$

$=(x^3-8)(x^3+8)$

$=x^6-64$ 답 ①

0048 $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\times y+y^2\}-(x-3y)\{x^2+x\times3y+(3y)^2\}$

$=\{(3x)^3+y^3\}-\{x^3-(3y)^3\}$

$=27x^3+y^3-(x^3-27y^3)$

$=26x^3+28y^3$

따라서 $a=26$, $b=28$이므로

$a-b=-2$ 답 **−2**

0049 $x+y+z=4$에서

$x+y=4-z$, $y+z=4-x$, $z+x=4-y$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(4-z)(4-x)(4-y)$

$=4^3-4^2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-xyz$

$=64-16\times4+4\times5-2$

$=18$ 답 **18**

0050 $x^2+x=t$로 놓으면

$(x^2+x+1)(x^2+x-2)=(t+1)(t-2)=t^2-t-2$

$=(x^2+x)^2-(x^2+x)-2$

$=x^4+2x^3+x^2-x^2-x-2$

$=x^4+2x^3-x-2$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-1$이므로

$a-b+c=0$ 답 ③

0051 $(a+b-c^2)(a-b+c^2)=\{a+(b-c^2)\}\{a-(b-c^2)\}$

$b-c^2=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(a+t)(a-t)=a^2-t^2$

$=a^2-(b-c^2)^2$

$=a^2-(b^2-2bc^2+c^4)$

$=a^2-b^2-c^4+2bc^2$ 답 $\boldsymbol{a^2-b^2-c^4+2bc^2}$

0052 $(x-3)(x-5)(x-1)(x+1)$

$=\{(x-3)(x-1)\}\{(x-5)(x+1)\}$

$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-5)$

$x^2-4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+3)(t-5)$

$=t^2-2t-15$

$=(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$

$=x^4-8x^3+16x^2-2x^2+8x-15$

$=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

답 $\boldsymbol{x^4-8x^3+14x^2+8x-15}$

0053 $(5+2a)^3=A$, $(5-2a)^3=B$로 놓으면

$\{(5+2a)^3-(5-2a)^3\}^2-\{(5+2a)^3+(5-2a)^3\}^2$

$=(A-B)^2-(A+B)^2=-4AB$

$=-4(5+2a)^3(5-2a)^3$

$=-4\{(5+2a)(5-2a)\}^3$

$=-4(25-4a^2)^3$

$=-4(25-4\times7)^3$ ($\because a=\sqrt{7}$)

$=-4\times(-27)=108$ 답 **108**

0054 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$8=2^2+2xy$ $\quad\therefore xy=2$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\times2\times2=20$ 답 ④

0055 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$4=1^3-3xy\times1$ $\quad\therefore xy=-1$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{1^2-2\times(-1)}{-1}=-3$ 답 **−3**

0056 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$에서

$a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$ ······ ㉮

$$\therefore \frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=\frac{a^3-b^3}{ab}=\frac{(a-b)^3+3ab(a-b)}{ab}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}}{1}$$

$$=30\sqrt{3}$$ ······ ㉯

답 $30\sqrt{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$a-b$, ab의 값 구하기	40 %
㉯	$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}$의 값 구하기	60 %

0057 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$7=(\sqrt{5})^2-2xy \qquad \therefore xy=-1$

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=7^2-2\times(-1)^2=47$

답 47

0058 $x\neq0$이므로 $x^2-3x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\times3=36$

답 ⑤

참고 $x=0$을 $x^2-3x-1=0$에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0059 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=3+2=5$에서

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ($\because x>0$)

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

답 ①

0060 $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$

$\therefore x^3+2x^2+3x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}+2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(2^3+3\times2)+2(2^2+2)+3\times2$

$=32$

답 ②

0061 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$6=2^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서

$8=2\times\{6-(-1)\}+3abc$

$3abc=-6 \qquad \therefore abc=-2$

답 -2

0062 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$8=4^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=4$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

에서 $4^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\times(-3)\times4$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=40$

답 40

0063 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$18=6^2-2(xy+yz+zx) \qquad \therefore xy+yz+zx=9$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, 즉 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=3$에서

$\frac{9}{xyz}=3 \qquad \therefore xyz=3$

$\therefore x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=6\times(18-9)+3\times3=63$

답 ③

0064 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$8=0^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-4$

$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$에서

$8^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ ······ ㉠

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에서

$(-4)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\times0$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=16$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$64=a^4+b^4+c^4+2\times16$

$\therefore a^4+b^4+c^4=64-32=32$

답 32

0065 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1$

답 ①

0066 $9\times11\times(10^2+1)\times(10^4+1)$

$=(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

답 ④

0067 $1015=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{1014\times(1015^2+1015+1)}{1015\times1016+1}&=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a+1)+1}\\&=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1\\&=1015-1=1014\end{aligned}$$

답 ②

0068 $100=a$로 놓으면

$$\begin{aligned}101^2+98\times102&=(a+1)^2+(a-2)(a+2)\\&=a^2+2a+1+a^2-4\\&=2a^2+2a-3\\&=2\times100^2+2\times100-3\\&=20197\end{aligned}$$

따라서 주어진 수는 다섯 자리 자연수이다.

$\therefore\ n=5$

답 **5**

0069

$$\begin{array}{r}
x\ -1\\
x^2+x+1\,\big)\,\overline{x^3-2x+1}\\
\underline{x^3+x^2+\ x}\\
-x^2-3x+1\\
\underline{-x^2-\ x-1}\\
-2x+2
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-2x+2$이므로

$Q(2)+R(-3)=1+8=9$

답 **9**

0070

$$\begin{array}{r}
x^2+2x\ +1\\
2x-1\,\big)\,\overline{2x^3+3x^2+6}\\
\underline{2x^3-\ x^2}\\
4x^2\\
\underline{4x^2-2x}\\
2x+6\\
\underline{2x-1}\\
7
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=7$이므로

$a+b+c+d=15$

답 **15**

0071

$$\begin{array}{r}
2x\ -3\\
x^2-x-2\,\big)\,\overline{2x^3-5x^2+4x+1}\\
\underline{2x^3-2x^2-4x}\\
-3x^2+8x+1\\
\underline{-3x^2+3x+6}\\
5x-5
\end{array}$$

따라서 몫은 $2x-3$, 나머지는 $5x-5$이므로

$a=2$, $b=-3$, $c=5$, $d=-5$

$\therefore\ ab-cd=-6-(-25)=19$

답 ⑤

0072 $2x^4+5x^2+12x-10=A(2x^2+2x-3)-x+5$

이므로

$A(2x^2+2x-3)=2x^4+5x^2+13x-15$

$\therefore\ A=(2x^4+5x^2+13x-15)\div(2x^2+2x-3)$

$$\begin{array}{r}
x^2-\ x\ +5\\
2x^2+2x-3\,\big)\,\overline{2x^4+\ 5x^2+13x-15}\\
\underline{2x^4+2x^3-\ 3x^2}\\
-2x^3+\ 8x^2+13x\\
\underline{-2x^3-\ 2x^2+\ 3x}\\
10x^2+10x-15\\
\underline{10x^2+10x-15}\\
0
\end{array}$$

$\therefore\ A=x^2-x+5$

답 $\boldsymbol{x^2-x+5}$

0073 $f(x)=(x+1)(2x-5)+6=2x^2-3x+1$

$$\begin{array}{r}
2x\ -1\\
x-1\,\big)\,\overline{2x^2-3x+1}\\
\underline{2x^2-2x}\\
-\ x+1\\
\underline{-\ x+1}\\
0
\end{array}$$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-1$, 나머지는 0이다.

답 **몫 : $\boldsymbol{2x-1}$, 나머지 : 0**

0074 직사각형의 세로의 길이를 A라 하면

$(x+3)A=x^3-x^2-5x+21$

$\therefore\ A=(x^3-x^2-5x+21)\div(x+3)$

$$\begin{array}{r}
x^2-4x\ +7\\
x+3\,\big)\,\overline{x^3-\ x^2-\ 5x+21}\\
\underline{x^3+3x^2}\\
-4x^2-\ 5x\\
\underline{-4x^2-12x}\\
7x+21\\
\underline{7x+21}\\
0
\end{array}$$

$\therefore\ A=x^2-4x+7$

따라서 직사각형의 세로의 길이는 x^2-4x+7이다.

답 $\boldsymbol{x^2-4x+7}$

0075 $A=(x+1)(x+2)+2=x^2+3x+4$

$B=(x+1)(2x+1)+3=2x^2+3x+4$

·· ㉮

$$\begin{aligned}\therefore\ xA+B&=x(x^2+3x+4)+2x^2+3x+4\\&=x^3+3x^2+4x+2x^2+3x+4\\&=x^3+5x^2+7x+4\end{aligned}$$

·· ㉯

$$
\begin{array}{r l}
 & \quad x\ +4 \\
x^2+x+1\,\big) & \overline{x^3+5x^2+7x+4} \\
 & x^3+\ x^2+\ x \\
\hline
 & \quad\ \ 4x^2+6x+4 \\
 & \quad\ \ 4x^2+4x+4 \\
\hline
 & \qquad\qquad 2x
\end{array}
$$

따라서 $xA+B$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫은 $x+4$, 나머지는 $2x$이다.

.... ㉰

답 몫: $x+4$, 나머지: $2x$

단계	채점요소	배점
㉮	다항식 A, B 구하기	40 %
㉯	$xA+B$ 계산하기	20 %
㉰	$xA+B$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫과 나머지 구하기	40 %

0076 $f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{3}(3x-2)Q(x)+R$

$=(3x-2)\times\frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R

0077 $f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\times aQ(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

답 ④

0078 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

이므로 이 식의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+Rx$

$=\frac{x}{2}(2x-1)Q(x)+\frac{R}{2}(2x-1)+\frac{R}{2}$

$=(2x-1)\left\{\frac{x}{2}Q(x)+\frac{R}{2}\right\}+\frac{R}{2}$

따라서 $xf(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{x}{2}Q(x)+\frac{R}{2}$, 나머지는 $\frac{R}{2}$이다.

답 ①

0079 다항식 $3x^3-2x^2-5x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\
 & & 6 & 8 & 6 \\
\hline
 & 3 & 4 & 3 & \boxed{7}
\end{array}
$$

따라서 $a=8$, $b=4$, $R=7$이므로

$a+b+R=19$

답 19

0080 주어진 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 다음과 같으므로

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & a & b & c & d \\
 & & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{-9} \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & -4
\end{array}
$$

$a=1$, $b+3=1$, $c+3=-3$, $d+(-9)=-4$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=-6$, $d=5$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-6x+5$이므로

$f(-1)=-1-2+6+5=8$

답 8

0081 주어진 조립제법에서 $2a=-3$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 오른쪽과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{3}{2} & 2 & b & 1 & c \\
 & & -3 & -3 & \boxed{3} \\
\hline
 & 2 & 2 & \boxed{-2} & 7
\end{array}
$$

$b-3=2$, $c+3=7$

$\therefore b=5$, $c=4$

$\therefore abc=\left(-\frac{3}{2}\right)\times5\times4=-30$

$2x^3+5x^2+x+4$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+2x-2$, 나머지는 7이므로

$2x^3+5x^2+x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x-2)+7$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)\times2(x^2+x-1)+7$

$=(2x+3)(x^2+x-1)+7$

따라서 주어진 다항식을 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-1이다.

답 ②

유형 up

본문 16쪽

0082 $a-b=1$, $a-c=3$을 변끼리 빼면

$-b+c=-2 \qquad \therefore b-c=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1^2+2^2+(-3)^2\}=7$

답 ①

0083 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{2})^2+4^2\}$
$=\frac{1}{2}(11+6\sqrt{2}+11-6\sqrt{2}+16)=19$ 답 **19**

0084 $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc=0$
이때 $a+b+c=15$, 즉 $a+b+c\neq0$이므로
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c$
$a+b+c=15$에서 $a=b=c=5$
$\therefore abc=5\times5\times5=125$ 답 **125**

0085 상자의 밑면의 가로와 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로
$4(a+b+c)=28$ $\therefore a+b+c=7$
상자의 겉넓이가 24이므로
$2(ab+bc+ca)=24$
$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=7^2-24=25$
따라서 상자의 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{25}=5$ 답 **5**

0086 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로
$\sqrt{x^2+y^2}=11$ $\therefore x^2+y^2=11^2$
직사각형의 둘레의 길이가 30 cm이므로
$2(x+y)=30$ $\therefore x+y=15$
이때 직사각형의 넓이는 xy cm^2이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$11^2=15^2-2xy$, $2xy=104$ $\therefore xy=52$
따라서 직사각형의 넓이는 52 cm^2이다. 답 **52 cm^2**

0087 세 정사각형의 넓이의 합이 75이므로
$a^2+b^2+c^2=75$
세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 52이므로
$4a+4b+4c=52$ $\therefore a+b+c=13$
한편 $S_A=a^2$, $S_D=(a+b)(a+c)$이므로
$S_D-S_A=(a+b)(a+c)-a^2$
$=ab+bc+ca$
이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$75=13^2-2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=47$
$\therefore S_D-S_A=47$ 답 **47**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 17~19쪽

0088 $A-2X=B$에서 $2X=A-B$
$\therefore X=\frac{1}{2}(A-B)$
$=\frac{1}{2}\{(4x^3+x^2-3x-2)-(x^2-3x+2)\}$
$=\frac{1}{2}(4x^3+x^2-3x-2-x^2+3x-2)$
$=\frac{1}{2}(4x^3-4)=2x^3-2$ 답 ④

0089 $(2x-1)^3(x-3)^2$
$=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2-6x+9)$
이 식의 전개식에서 x^3항은
$8x^3\times9+(-12x^2)\times(-6x)+6x\times x^2$
$=72x^3+72x^3+6x^3=150x^3$
따라서 x^3의 계수는 150이다. 답 **150**

0090 $(2x+y-1)^2=3$에서
$4x^2+y^2+(-1)^2+4xy-2y-4x=3$
$\therefore 4x^2+y^2+4xy-4x-2y=2$ 답 ②

0091 $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$=\{(x-1)(x^2+x+1)\}\{(x+1)(x^2-x+1)\}$
$=(x^3-1)(x^3+1)$
$=x^6-1=4-1$ ($\because x^6=4$)
$=3$ 답 ③

0092 $a^2+5a-1=0$에서 $a^2+5a=1$
$\therefore (a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$
$=\{(a+1)(a+4)\}\{(a+2)(a+3)\}$
$=(a^2+5a+4)(a^2+5a+6)$
$=(1+4)(1+6)$ ($\because a^2+5a=1$)
$=35$ 답 ⑤

0093 $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$에서
$10=3^2-xy$ $\therefore xy=-1$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=3^3-3\times(-1)\times3=36$ 답 **36**

0094 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(\sqrt{5})^2+4=9$에서

$x+\frac{1}{x}=3\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

답 **18**

0095 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$7=3^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=1$

$a+b+c=3$에서

$a+b=3-c,\ b+c=3-a,\ c+a=3-b$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$

$=(3-c)(3-a)(3-b)$

$=3^3-3^2(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc$

$=27-9\times3+3\times1-1=2$

답 ④

0096 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$5=(\sqrt{3})^2-2(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca=-1$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=\sqrt{3}\{5-(-1)\}+3\times(-\sqrt{3})$

$=6\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

답 ⑤

0097 $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}=x,\ 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}=y$라 하면

$x+y=2$

$xy=\{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}=1^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

$=1-(5-2\sqrt{6})=-4+2\sqrt{6}$

$\therefore (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

$=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=2^3-3\times(-4+2\sqrt{6})\times2$

$=32-12\sqrt{6}$

답 $\mathbf{32-12\sqrt{6}}$

0098 $x^4+5x^3+3x^2-13x+9=A(x^2+2x-2)-5x+7$ 이므로

$A(x^2+2x-2)=x^4+5x^3+3x^2-8x+2$

$\therefore A=(x^4+5x^3+3x^2-8x+2)\div(x^2+2x-2)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x-1 \\ \hline
x^2+2x-2 & x^4+5x^3+3x^2-8x+2 \\
 & x^4+2x^3-2x^2 \\ \hline
 & \quad 3x^3+5x^2-8x \\
 & \quad 3x^3+6x^2-6x \\ \hline
 & \qquad -x^2-2x+2 \\
 & \qquad -x^2-2x+2 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+3x-1$

답 $\mathbf{x^2+3x-1}$

0099 직육면체의 높이를 A라 하면

$(x-1)(x+2)A=x^3+5x^2+2x-8$

$(x^2+x-2)A=x^3+5x^2+2x-8$

$\therefore A=(x^3+5x^2+2x-8)\div(x^2+x-2)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x+4 \\ \hline
x^2+x-2 & x^3+5x^2+2x-8 \\
 & x^3+x^2-2x \\ \hline
 & \quad 4x^2+4x-8 \\
 & \quad 4x^2+4x-8 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\therefore A=x+4$

따라서 직육면체의 높이는 $x+4$이다.

답 $\mathbf{x+4}$

0100 $f(x)=(2x+1)Q(x)+R$

$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times2Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 **몫: $\mathbf{2Q(x)}$, 나머지: $\mathbf{R}$**

0101 주어진 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 다음과 같다.

$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-4}$	-2
		3	$\boxed{1}$	$\boxed{-1}$
	9	3	-3	$\boxed{-3}$

즉, $f(x)=9x^3-4x-2$이고 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $9x^2+3x-3$, 나머지는 -3이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)(9x^2+3x-3)-3$

$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times3(3x^2+x-1)-3$

$=(3x-1)(3x^2+x-1)-3$

따라서 $Q(x)=3x^2+x-1,\ R=-3$이므로

$f(-1)+Q(2)+R=-7+13-3=3$

답 **3**

0102 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여

$(a-b)^2\geq0,\ (b-c)^2\geq0,\ (c-a)^2\geq0$이므로 ㉠에 의하여

$(a-b)^2=0,\ (b-c)^2=0,\ (c-a)^2=0$

$\therefore a=b,\ b=c,\ c=a$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b=c$인 정삼각형이다.

답 ③

0103 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{xy}=3$에서

$xy=1$

…… ㉮

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

…… ㉯

$=3^3-3\times1\times3=18$

…… ㉰

답 **18**

단계	채점요소	배점
㉮	xy의 값 구하기	30 %
㉯	x^3+y^3의 식 변형하기	40 %
㉰	x^3+y^3의 값 구하기	30 %

0104 $x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=1$

…… ㉮

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$이므로

…… ㉯

$$2x^2-x-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)-3$$
$$=2\times3-1-3$$
$$=2$$

…… ㉰

답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	$x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	30 %
㉯	$x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	30 %
㉰	주어진 식의 값 구하기	40 %

0105

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2+x+2 & x^3+4x^2+5x+a \\ & x^3+\ \ x^2+2x \\ \hline & \quad 3x^2+3x+a \\ & \quad 3x^2+3x+6 \\ \hline & \qquad\qquad a-6 \end{array}$$

…… ㉮

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-6=0 \qquad \therefore a=6$

…… ㉯

답 **6**

단계	채점요소	배점
㉮	x^3+4x^2+5x+a를 x^2+x+2로 나누기	60 %
㉯	a의 값 구하기	40 %

0106 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 둘레의 길이가 34이므로

$2(x+y)=34 \qquad \therefore x+y=17$

…… ㉮

직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로

$\sqrt{x^2+y^2}=13 \qquad \therefore x^2+y^2=169$

…… ㉯

이때 직사각형의 넓이는 xy이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$169=17^2-2xy$, $2xy=120 \qquad \therefore xy=60$

따라서 직사각형의 넓이는 60이다.

…… ㉰

답 **60**

단계	채점요소	배점
㉮	$x+y$의 값 구하기	20 %
㉯	x^2+y^2의 값 구하기	40 %
㉰	직사각형의 넓이 구하기	40 %

0107 $(x+1)(x+2)(x+3)\times\cdots\times(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\times10+x^8\times9x+x^7\times8x^2+\cdots+x\times2x^8+1\times x^9$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ②

0108 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$2=1^2-2xy \qquad \therefore xy=-\frac{1}{2}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1=\frac{5}{2}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

$\therefore x^7+y^7+x^4y^3+x^3y^4=x^4(x^3+y^3)+y^4(x^3+y^3)$

$=(x^3+y^3)(x^4+y^4)$

$=\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{35}{4}$ 답 $\frac{35}{4}$

0109 처음 직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

즉 12개의 작은 직육면체 중 부피가 a^3인 직육면체는 1개, 부피가 a^2b인 직육면체는 4개, 부피가 ab^2인 직육면체는 5개, 부피가 b^3인 직육면체는 2개이다.

따라서 부피가 150인 작은 직육면체는 5개이므로 $ab^2=150$

$ab^2=150=6\times5^2$이고, a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=6$, $b=5$

$\therefore a+2b=6+2\times5=16$ 답 **16**

02 항등식과 나머지정리

교과서 문제 정/복/하/기 본문 21쪽

0110 ㄱ. 특정한 x의 값에 대해서만 등식이 성립한다.
ㄴ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$(x-1)^2+x-1=x^2-2x+1+x-1=x^2-x$
이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.
ㄷ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$
이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.
ㄹ. 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$3(x-1)+5=3x+2$
이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.
ㅁ. 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$x(x-8)+10=x^2-8x+10$
이므로 옳지 않은 등식이다.
따라서 x에 대한 항등식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 **ㄴ, ㄷ, ㄹ**

0111 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+c=0,\ -(b-3)=0,\ a-2b=0$
$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=-6$ 답 $\boldsymbol{a=6,\ b=3,\ c=-6}$

0112 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$(x-2)(ax+3)=ax^2+(3-2a)x-6$이므로
$ax^2+(3-2a)x-6=2x^2+bx+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2,\ 3-2a=b,\ -6=c$
$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=-6$ 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-1,\ c=-6}$

0113 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$이므로
$2x^2+x+5=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2,\ 2a+b=1,\ a+b+c=5$
$\therefore\ a=2,\ b=-3,\ c=6$ 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-3,\ c=6}$

0114 주어진 등식의 양변에 $x=0,\ x=1,\ x=2$를 각각 대입하면
$-c=1,\ b=3,\ 2a+2b+c=7$
$\therefore\ a=1,\ b=3,\ c=-1$ 답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-1}$
다른풀이 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면
$ax^2+(-a+b+c)x-c=x^2+x+1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ -a+b+c=1,\ -c=1$
$\therefore\ a=1,\ b=3,\ c=-1$

0115 주어진 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로
$a+b+2=0,\ 2a+3b+3=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=1$ 답 $\boldsymbol{a=-3,\ b=1}$

0116 $a(x-y)-b(x+y)-1=(a-b)x-(a+b)y-1$
이므로
$(a-b)x-(a+b)y-1=3x-9y+c$
이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로
$a-b=3,\ -(a+b)=-9,\ -1=c$
$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=-1$ 답 $\boldsymbol{a=6,\ b=3,\ c=-1}$

0117 (1) $f(1)=1-2+5-6=-2$
(2) $f(-3)=-27-18-15-6=-66$
답 (1) $\boldsymbol{-2}$ (2) $\boldsymbol{-66}$

0118 (1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-1$
(2) $f\left(-\frac{2}{3}\right)=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$
답 (1) $\boldsymbol{-1}$ (2) $\boldsymbol{\frac{17}{4}}$

0119 $f(x)=x^3+ax^2+2x+4$로 놓으면 $f(-2)=4$이므로
$-8+4a-4+4=4\quad\therefore\ a=3$ 답 **3**

0120 (1) $f(2)=0$이므로 $16-20+2k-4=0$
$2k=8\quad\therefore\ k=4$
(2) $f(-2)=0$이므로 $-16-20-2k-4=0$
$-2k=40\quad\therefore\ k=-20$
답 (1) **4** (2) $\boldsymbol{-20}$

0121 $f(1)=0,\ f(-2)=0$이므로
$1+a+b-6=0,\ -8+4a-2b-6=0$
$\therefore\ a+b=5,\ 2a-b=7$
두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=1$ 답 $\boldsymbol{a=4,\ b=1}$

유형 익/히/기 본문 22~27쪽

0122 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면
$(x-1)(x^2+bx-c)=x^3+(b-1)x^2+(-b-c)x+c$
이므로

$x^3-ax+3=x^3+(b-1)x^2+(-b-c)x+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=b-1,\ -a=-b-c,\ 3=c$
따라서 $a=4,\ b=1,\ c=3$이므로
$a+b+c=8$ 답 8

0123 $a(x+y)-b(2x-y)=(a-2b)x+(a+b)y$
$=2x+5y$
이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a-2b=2,\ a+b=5$
따라서 $a=4,\ b=1$이므로
$a-b=3$ 답 3

0124 $a\circledcirc x=ax+x,\ x\circledcirc b=bx+b,\ x\circledcirc 3=3x+3$
이므로
$(a\circledcirc x)-(x\circledcirc b)=(ax+x)-(bx+b)$
$=(a-b+1)x-b$
$=3x+3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b+1=3,\ -b=3$
따라서 $a=-1,\ b=-3$이므로
$a+b=-4$ 답 -4

0125 $x^3+5x+a=(x^2+x-1)Q(x)+bx+3$이 x에 대한 항등식이므로 $Q(x)$는 x에 대한 일차식이어야 한다.
이때 좌변의 최고차항의 계수가 1이므로
$Q(x)=x+c$ (c는 상수)로 놓으면
$x^3+5x+a=(x^2+x-1)(x+c)+bx+3$
$=x^3+(c+1)x^2+(b+c-1)x-c+3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c+1,\ 5=b+c-1,\ a=-c+3$
따라서 $a=4,\ b=7,\ c=-1$이므로
$ab=28$ 답 ③

0126 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$3=-c \quad \therefore c=-3$
양변에 $x=1$을 대입하면
$2=2a \quad \therefore a=1$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$8=2b \quad \therefore b=4$
$\therefore abc=-12$ 답 ①

0127 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$c=2$
양변에 $x=2$를 대입하면
$b+c=3,\ b+2=3 \quad \therefore b=1$
양변에 $x=0$을 대입하면
$2a-b+c=3,\ 2a-1+2=3 \quad \therefore a=1$
$\therefore a^2+b^2+c^2=1+1+4=6$ 답 6

0128 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$c=19$
양변에 $x=2$를 대입하면
$36=a+b+c,\ a+b+19=36 \quad \therefore a+b=17$ …… ㉠
양변에 $x=0$을 대입하면
$10=a-b+c,\ a-b+19=10 \quad \therefore a-b=-9$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=13$
$\therefore 2a+b-c=2$ 답 2

0129 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1-a+b=0 \quad \therefore a-b=-1$ …… ㉠
양변에 $x=2$를 대입하면
$32-4a+b=0 \quad \therefore 4a-b=32$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11,\ b=12$
$\therefore x^5-11x^2+12=(x+1)(x-2)f(x)$
양변에 $x=1$을 대입하면
$1-11+12=(1+1)(1-2)f(1)$
$-2f(1)=2 \quad \therefore f(1)=-1$ 답 -1

0130 주어진 등식을 k에 대하여 정리하면
$(x^2-4)k+2y^2-18=0$
이 등식은 k에 대한 항등식이므로
$x^2-4=0,\ 2y^2-18=0 \quad \therefore x^2=4,\ y^2=9$
$\therefore x^2+y^2=13$ 답 13

0131 주어진 방정식이 $x=1$을 근으로 가지므로
$1+(m-2)+(m+2)p+q=0$
이 등식을 m에 대하여 정리하면
$(1+p)m+2p+q-1=0$
이 등식은 m에 대한 항등식이므로
$1+p=0,\ 2p+q-1=0$
따라서 $p=-1,\ q=3$이므로 $p+q=2$ 답 ④

0132 $y-x=1$에서 $y=x+1$
이것을 주어진 등식에 대입하면
$ax^2+2ax+b(x+1)^2-cx-(x+1)-1=0$
$(a+b)x^2+(2a+2b-c-1)x+b-2=0$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$a+b=0,\ 2a+2b-c-1=0,\ b-2=0$
따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=-1$이므로
$a+b+c=-1$ 답 ①

참고 $x=y-1$을 대입해서 y에 대한 식으로 정리해도 결과는 같다.

0133 $x+2y=1$에서 $x=1-2y$
이것을 주어진 등식에 대입하면
$3a(1-2y)+by=15$
$(-6a+b)y+3a-15=0$
이 등식은 y에 대한 항등식이므로
$-6a+b=0,\ 3a-15=0$
따라서 $a=5,\ b=30$이므로 $a+b=35$ 답 35

0134 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2^{15}=a_0+a_1+\cdots+a_{14}+a_{15}$ …… ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=a_0-a_1+\cdots+a_{14}-a_{15}$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2^{15}=2(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15})$
$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15}=2^{14}$ 답 ②

0135 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$ …… ㉠
…… ㉮
양변에 $x=-1$을 대입하면
$4^3=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_6$ …… ㉡
…… ㉯
㉠+㉡을 하면
$64=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=32$
…… ㉰
답 32

단계	채점요소	배점
㉮	$x=1$을 대입하여 정리하기	30 %
㉯	$x=-1$을 대입하여 정리하기	30 %
㉰	$a_0+a_2+a_4+a_6$의 값 구하기	40 %

0136 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{50}+1=a_{50}+a_{49}+a_{48}+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠
양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_{50}-a_{49}+a_{48}-\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2^{50}=2(a_{49}+a_{47}+\cdots+a_3+a_1)$
$\therefore a_{49}+a_{47}+\cdots+a_3+a_1=2^{49}$ 답 ⑤

0137 x^3+ax^2+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax^2+b=(x^2+x-2)(x+c)+2x+3$
$\qquad=x^3+(1+c)x^2+cx-2c+3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1+c,\ 0=c,\ b=-2c+3$
따라서 $a=1,\ b=3,\ c=0$이므로
$ab=3$ 답 ④

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2+x-2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수)의 꼴이다.

0138 x^3+8x^2+5x-a를 x^2+3x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+8x^2+5x-a=(x^2+3x+b)(x+c)$
$\qquad=x^3+(c+3)x^2+(b+3c)x+bc$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$8=c+3,\ 5=b+3c,\ -a=bc$
따라서 $a=50,\ b=-10,\ c=5$이므로
$a+b=40$ 답 40

0139 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+c)+3x+4$
$\qquad=x^3+(c+4)x^2+(b+4c+3)x+bc+4$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c+4,\ a=b+4c+3,\ -8=bc+4$
따라서 $a=-10,\ b=3,\ c=-4$이므로
$a+b=-7$ 답 ④

다른풀이

$$\begin{array}{r|l}
 & x-4 \\
\hline
x^2+4x+b & x^3+\qquad ax-\ 8 \\
 & x^3+4x^2+\quad bx \\
\hline
 & -4x^2+(a-b)x-8 \\
 & -4x^2-\ 16x-4b \\
\hline
 & (a-b+16)x-8+4b
\end{array}$$

이때 나머지가 $3x+4$이므로
$(a-b+16)x-8+4b=3x+4$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b+16=3,\ -8+4b=4$
따라서 $a=-10,\ b=3$이므로
$a+b=-7$

0140 $f(x)$, $g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 2, -2이므로
$f(3)=2,\ g(3)=-2$
따라서 $3f(x)+2g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$3f(3)+2g(3)=3\times2+2\times(-2)=2$ 답 ④

0141 $f(x)+g(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)+g(2)=0$ …… ㉠
$f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
$f(2)-g(2)=4$ …… ㉡
…… ㉮

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$f(2)=2,\ g(2)=-2$ ······ ㉯

따라서 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2)g(2)=-4$ ······ ㉰

답 -4

단계	채점요소	배점
㉮	$f(2)$, $g(2)$에 대한 식 구하기	40 %
㉯	$f(2)$, $g(2)$의 값 구하기	30 %
㉰	$f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

0142 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-2$로 놓으면
$f(1)=1+a+b-2=3$
$\therefore a+b=4$ ······ ㉠
$f(-1)=1-a+b-2=-3$
$\therefore -a+b=-2$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$
$\therefore ab=3$

답 ⑤

0143 $f(x)=ax^5+bx^3+cx-4$로 놓으면
$f(1)=a+b+c-4=3$ $\quad\therefore a+b+c=7$
$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로
$f(-1)=-a-b-c-4$
$=-(a+b+c)-4$
$=-7-4=-11$

답 -11

0144 나머지정리에 의하여
$f(-1)=3,\ f(-2)=-1$
다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2+3x+2)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-1$, $x=-2$를 각각 대입하면
$f(-1)=-a+b=3$ ······ ㉠
$f(-2)=-2a+b=-1$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=7$
따라서 $R(x)=4x+7$이므로
$R(1)=4+7=11$

답 ⑤

0145 나머지정리에 의하여
$f(-2)=6,\ f(2)=2$
$(x^2+x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$(x^2+x+1)f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$
$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하면
$3f(-2)=-2a+b=18$ ······ ㉠
$7f(2)=2a+b=14$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=16$
따라서 구하는 나머지는 $-x+16$이다.

답 $-x+16$

0146 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+4$
$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+4$
양변에 $x=2$를 대입하면
$f(2)=4$ ······ ㉮

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$f(x)=(x^2-2x-3)Q_2(x)+4x-3$
$=(x-3)(x+1)Q_2(x)+4x-3$
양변에 $x=3$을 대입하면
$f(3)=9$ ······ ㉯

$f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$
$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ ······ ㉰

양변에 $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면
$f(2)=2a+b=4$ ······ ㉠
$f(3)=3a+b=9$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-6$
따라서 구하는 나머지는 $5x-6$이다. ······ ㉱

답 $5x-6$

단계	채점요소	배점
㉮	$f(2)$의 값 구하기	20 %
㉯	$f(3)$의 값 구하기	20 %
㉰	$f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 식 구하기	30 %
㉱	나머지 구하기	30 %

0147 $f(x)$를 $(x^2-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이므로 ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이 되어야 한다.
$\therefore f(x)=(x^2-1)(x-2)Q(x)+a(x^2-1)+2x+3$ ······ ㉠

한편, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 ㉠에서

$f(2)=3a+7=4$ $\quad \therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x^2-1)+2x+3=-x^2+2x+4$ 답 $\mathbf{-x^2+2x+4}$

0148 $x^{11}-x^9+x^7-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{11}-x^9+x^7-1=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\qquad =x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a-b+c=-2$

$a-b-1=-2$ $\quad \therefore a-b=-1$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$

$a+b-1=0$ $\quad \therefore a+b=1$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=1$

따라서 $R(x)=x-1$이므로 $R(3)=2$ 답 **2**

0149 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$ax^2+bx+c=a(x-1)(x-2)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$

$\qquad +a(x-1)(x-2)$ ...... ㉠

또, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q'(x)+x-2$

즉, $f(3)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=2a=1$ $\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$이므로

$R(0)=\frac{1}{2}\times(-1)\times(-2)=1$ 답 ①

0150 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+2x-4$

$\qquad =(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-6$

따라서 $f(2x-3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1-3)=f(-1)=-6$ 답 ①

0151 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=R$

따라서 $f(2x-2)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times2-2)=f(2)=R$ 답 ①

0152 $f(x)$를 $(3x-2)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(3x-2)(x-2)Q(x)+2x-5$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-1$

따라서 $f(3x-7)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times3-7)=f(2)=-1$ 답 $\mathbf{-1}$

0153 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(1)+g(1)=6$ ...... ㉠

$2f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 8이므로

$2f(1)+g(1)=8$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $f(1)=2$

따라서 $f(3x-5)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times2-5)=f(1)=2$ 답 ②

0154 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$ ...... ㉠

또, $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$Q(x)=(x+2)Q'(x)-1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)\{(x+2)Q'(x)-1\}+3$

$\qquad =(x-2)(x+2)Q'(x)-x+5$

이 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=7$

따라서 $xf(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$-2f(-2)=-2\times7=-14$ 답 ②

0155 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x+7$이므로

$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+7$ ...... ㉠

또, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+2\}+x+7$

$\qquad =(x^3-1)Q'(x)+2x^2+3x+9$

따라서 $R(x)=2x^2+3x+9$이므로

$R(-3)=18-9+9=18$ 답 **18**

0156 $x^{2018}+x^{2017}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{2018}+x^{2017}+x=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=3$

한편, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=-2Q(-1)+3$

$\therefore Q(-1)=2$

답 **2**

0157 $f(x)=x^4+kx^2+3x+7$이 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=1+k-3+7=0$

$\therefore k=-5$

답 ⑤

0158 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$f(1)=1+a+b-2=0 \quad \therefore a+b=1$ …… ㉠

$f(2)=8+4a+2b-2=0 \quad \therefore 2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$

$\therefore a-b=-9$

답 **−9**

0159 $f(x-2)f(x+1)$이 $x-2$로 나누어떨어지므로

$f(2-2)f(2+1)=0$, 즉 $f(0)f(3)=0$

$\therefore f(0)=0$ 또는 $f(3)=0$

이때 $f(x)=x^3-ax^2+x-3$에 대하여 $f(0)=-3$이므로

$f(3)=0$

따라서 $f(3)=27-9a+3-3=0$이므로

$a=3$

답 **3**

0160 $f(-2)=f(-1)=f(1)=2$에서

$f(-2)-2=0$, $f(-1)-2=0$, $f(1)-2=0$이므로

$f(x)-2$는 $x+2$, $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어진다.

…… ㉮

이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)-2=(x+2)(x+1)(x-1)$

$\therefore f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)+2$

…… ㉯

따라서 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=(-1)\times(-2)\times(-4)+2=-6$

…… ㉰

답 **−6**

단계	채점요소	배점
㉮	$f(x)-2$가 $x+2$, $x+1$, $x-1$로 나누어떨어짐을 이해하기	30 %
㉯	$f(x)$ 구하기	50 %
㉰	$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지 구하기	20 %

0161 $f(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=1+a+b+2=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(-2)=-8+4a-2b+2=0$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

$\therefore a-b=3$

답 ⑤

0162 $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$라 하면

$f(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1-5-a+b=0$

$\therefore a-b=-6$ …… ㉠

$f(2)=8-20+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=8$

$\therefore f(x)=x^3-5x^2+2x+8$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=27-45+6+8=-4$

답 **−4**

0163 $f(x)-3$이 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-2)-3=0$, $f(3)-3=0$

$\therefore f(-2)=3$, $f(3)=3$

$f(x-2)$를 x^2-5x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x-2)=(x^2-5x)Q(x)+ax+b$

$\qquad=x(x-5)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(-2)=b=3$

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(3)=5a+b=3 \quad \therefore a=0$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

답 ②

유형 up

본문 28쪽

0164 $1000=x$라 하면 $998=x-2$

x^{11}을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{11}=(x-2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$R=2^{11}$

㉠의 양변에 $x=1000$을 대입하면

$1000^{11}=998Q(1000)+2^{11}$

이때 $2^{11}=2048$이고 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지는 $0\le(\text{나머지})<998$이므로 앞의 등식을 변형하면

$$\begin{aligned}1000^{11}&=998Q(1000)+2048\\&=998\{Q(1000)+2\}+52\end{aligned}$$

따라서 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지는 52이다. 답 ③

0165 $97=x$라 하면 $98=x+1$

x^7을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^7=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=-1$

㉠의 양변에 $x=97$을 대입하면

$$\begin{aligned}97^7&=98Q(97)-1\\&=98\{Q(97)-1\}+97\end{aligned}$$

따라서 97^7을 98로 나누었을 때의 나머지는 97이다. 답 **97**

0166 $3=x$라 하면 $4=x+1$

$x^{99}+x^{100}+x^{101}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{99}+x^{100}+x^{101}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=-1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^{99}+3^{100}+3^{101}=4Q(3)-1=4\{Q(3)-1\}+3$

따라서 $3^{99}+3^{100}+3^{101}$을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 **3**

0167

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & -3 & 6 \\
 & & 2 & 2 & -2 \\ \hline
2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{4} \to d \\
 & & 2 & 6 & \\ \hline
2 & 1 & 3 & \boxed{5} \to c & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & 1 \to a & \boxed{5} \to b & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned}x^3-x^2-3x+6&=(x-2)(x^2+x-1)+4\\&=(x-2)\{(x-2)(x+3)+5\}+4\\&=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+5\}+5]+4\\&=(x-2)\{(x-2)^2+5(x-2)+5\}+4\\&=(x-2)^3+5(x-2)^2+5(x-2)+4\end{aligned}$$

이므로 $a=1$, $b=5$, $c=5$, $d=4$

$\therefore abcd=100$ 답 **100**

다른풀이 $x-2=y$라 하면 $x=y+2$이므로

$(y+2)^3-(y+2)^2-3(y+2)+6=ay^3+by^2+cy+d$

$y^3+5y^2+5y+4=ay^3+by^2+cy+d$

$\therefore a=1,\ b=5,\ c=5,\ d=4$

$\therefore abcd=100$

0168

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\
 & & 1 & -2 & 0 \\ \hline
-1 & -1 & 2 & 0 & \boxed{-1} \to d \\
 & & 1 & -3 & \\ \hline
-1 & -1 & 3 & \boxed{-3} \to c & \\
 & & 1 & & \\ \hline
 & -1 \to a & \boxed{4} \to b & &
\end{array}$$

이므로 $a=-1$, $b=4$, $c=-3$, $d=-1$

$\therefore ab+cd=-1$ 답 **−1**

0169

$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{2} & 2 & -3 & -4 & 2 \\
 & & -1 & 2 & 1 \\ \hline
-\frac{1}{2} & 2 & -4 & -2 & \boxed{3} \\
 & & -1 & \frac{5}{2} & \\ \hline
-\frac{1}{2} & 2 & -5 & \boxed{\frac{1}{2}} & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & 2 & \boxed{-6} & &
\end{array}$$

이므로

$$\begin{aligned}&2x^3-3x^2-4x+2\\&=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+3\\&=\frac{1}{4}(2x+1)^3-\frac{3}{2}(2x+1)^2+\frac{1}{4}(2x+1)+3\end{aligned}$$

$\therefore a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{4},\ d=3$

$\therefore a+b+c-d=-4$ 답 ②

시험에 꼭 나오는 문제 본문 29~31쪽

0170 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x-1)(x+a)=x^2+(a-1)x-a$

이므로

$x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=b,\ a-1=-3,\ -a=2$

$\therefore a=-2,\ b=1$

$\therefore a+b=-1$ 답 ①

0171 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$15=3b \quad \therefore b=5$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-18=9c \quad \therefore c=-2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-2a+2b+c$

$\therefore a=4$

$\therefore a-b-3c=5$

답 ④

0172 $\dfrac{ax+by+6}{x+2y+2}=k$ (k는 상수)라 하면

$ax+by+6=k(x+2y+2)$

$\quad =kx+2ky+2k$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a=k$, $b=2k$, $6=2k$

따라서 $k=3$, $a=3$, $b=6$이므로

$b-a=3$

답 ④

0173 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10}=a_{20}+a_{19}+a_{18}+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^{10}=a_{20}-a_{19}+a_{18}-\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\times 2^{10}=2(a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2+a_0)$

$\therefore a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2+a_0=2^{10}$

한편, 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=1$

$\therefore a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2=2^{10}-1$

답 ①

0174 $3x^3+ax^2+2x+1$을 x^2+2x로 나누었을 때의 몫을 $3x+c$ (c는 상수)라 하면

$3x^3+ax^2+2x+1=(x^2+2x)(3x+c)+10x+b$

$\quad =3x^3+(6+c)x^2+(2c+10)x+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=6+c$, $2=2c+10$, $1=b$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-4$이므로

$b-a=-1$

답 **-1**

0175 $f(-1)=1-a+b=2 \quad \therefore a-b=-1$ ······ ㉠

$f(1)=1+a+b=8 \quad \therefore a+b=7$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

따라서 $f(x)=x^2+3x+4$이므로

$f(2)=4+6+4=14$

답 **14**

0176 $f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=5$ ······ ㉠

$f(-1)=-a+b=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

따라서 $R(x)=4x+1$이므로

$R(2)=4\times 2+1=9$

답 **9**

0177 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

한편, $8f(x+2)=f(2x)+7x^2$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$8f(2)=f(0)+0$

이때 $f(0)=8$이므로 $f(2)=1$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8f(3)=f(2)+7=8 \quad \therefore f(3)=1$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2a+b=1$ ······ ㉢

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3a+b=1$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=1$

따라서 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 **1**

0178 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $6x+1$이므로

㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $6x+1$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x-2)^2+6x+1$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+6x+1$ ······ ㉡

한편, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(1)=a+7=6 \quad \therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는 ㉡에서

$-(x-2)^2+6x+1=-x^2+10x-3$

답 **$-x^2+10x-3$**

0179 $f(-1)+g(-1)=8$ ······ ㉠

$f(-1)-g(-1)=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(-1)=6$, $g(-1)=2$

따라서 $x+f(x)g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$-1+f(-1)g(-1)=-1+6\times 2=11$

답 ⑤

0180 $P(x)=(x-2)Q(x)+3$ ······ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)\{(x-1)Q'(x)+2\}+3$

$=(x-1)(x-2)Q'(x)+2x-1$

따라서 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=2x-1$

$\therefore R(3)=2\times3-1=5$

답 ①

0181 $f(x)-1$을 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)-1=(x^2-3x+2)Q(x)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+1$

위의 식에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+1)=x(x-1)Q(x+1)+1$

$=(x^2-x)Q(x+1)+1$

따라서 $f(x+1)$을 x^2-x로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 **1**

0182 $2^{751}=(2^3)^{250}\times2=2\times8^{250}$

$8=x$라 하면 $9=x+1$

$2\times x^{250}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$2\times x^{250}=(x+1)Q(x)+R$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2\times(-1)^{250}=R$

$\therefore R=2$

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면

$2\times8^{250}=9Q(8)+2$

따라서 2^{751}을 9로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 **2**

0183 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$, $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $h(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)g(x)+5$

$g(x)=(x-2)h(x)-4$

$h(x)=(x+2)-3=x-1$이므로

$g(x)=(x-2)(x-1)-4$

$=x^2-3x-2$

$f(x)=(x+1)(x^2-3x-2)+5$

$=x^3-2x^2-5x+3$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=27-18-15+3=-3$ 답 **-3**

0184 $a+b=1$에서 $b=1-a$ ······ ㉠

$a^2x+by+z=a$에 ㉠을 대입하면

$a^2x+(1-a)y+z=a$

이 등식을 a에 대하여 정리하면

$xa^2-(y+1)a+y+z=0$

······ ㉮

이 등식은 a에 대한 항등식이므로

$x=0,\ y+1=0,\ y+z=0$

$\therefore x=0,\ y=-1,\ z=1$

······ ㉯

$\therefore 2x+y+z=0$

······ ㉰

답 **0**

단계	채점요소	배점
㉮	$b=1-a$를 주어진 등식에 대입하여 a에 대하여 정리하기	50 %
㉯	x, y, z의 값 구하기	30 %
㉰	$2x+y+z$의 값 구하기	20 %

0185 $(x+1)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$(2+1)f(2)=3$

$\therefore f(2)=1$

$f(2)=4+2a+b=1$에서

$2a+b=-3$ ······ ㉠

······ ㉮

$(x-2)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$(-1-2)f(-1)=6$

$\therefore f(-1)=-2$

$f(-1)=1-a+b=-2$에서

$a-b=3$ ······ ㉡

······ ㉯

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-3$

$\therefore a^2+b^2=9$

······ ㉰

답 **9**

단계	채점요소	배점
㉮	$f(2)$의 값을 이용하여 식 세우기	40 %
㉯	$f(-1)$의 값을 이용하여 식 세우기	40 %
㉰	a^2+b^2의 값 구하기	20 %

0186 $f(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 나머지 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-4$이므로

$R(x)=a(x^2-x+1)+2x-4$

$\therefore f(x)=(x^3+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+2x-4$ ······ ㉠

······ ㉮

$f(-1)=3$이므로 ㉠에서

$3a-6=3 \qquad \therefore a=3$

$\therefore R(x)=3(x^2-x+1)+2x-4=3x^2-x-1$

······ ㉯

$\therefore R(2)=3\times 2^2-2-1=9$

······ ㉰

답 **9**

단계	채점요소	배점
㉮	$f(x)$에 대한 식 세우기	50 %
㉯	$R(x)$ 구하기	30 %
㉰	$R(2)$의 값 구하기	20 %

0187 $f(x)$가 $(x+1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1+a-b+2=0 \qquad \therefore a-b=-1$ ······ ㉠

$f(-2)=-8+4a-2b+2=0 \qquad \therefore 2a-b=3$ ······ ㉡

······ ㉮

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=5$

$\therefore f(x)=x^3+4x^2+5x+2$

······ ㉯

따라서 $f(1-x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1-5)=f(-4)=-64+64-20+2=-18$

······ ㉰

답 **-18**

단계	채점요소	배점
㉮	인수정리를 이용하여 식 세우기	30 %
㉯	$f(x)$ 구하기	30 %
㉰	나머지 구하기	40 %

0188 $1+x+x^2+\cdots+x^{501}$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$1+x+x^2+\cdots+x^{501}=(x-1)Q(x)+R$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=502$

한편, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-1+1-1+\cdots+1-1=-2Q(-1)+502$

$0=-2Q(-1)+502$

$\therefore Q(-1)=251$

답 **251**

0189 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^n$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(4+2a+b)=0$

$\therefore b=-4-2a\ (\because 2^n\neq 0)$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-4-2a)=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x+2+a)=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$

$\therefore x^n(x+2+a)=(x-2)^{n-1}Q(x)+2^n$ ······ ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(4+a)=2^n$, $4+a=1 \qquad \therefore a=-3$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-6$

답 **-6**

0190 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ ······ ㉠

ㄱ. ㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$f(a)=R(a)$

$\therefore f(a)-R(a)=0$ (참)

ㄴ. $R(x)=x$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)+x$이므로

$f(a)-R(b)=a-b$

$f(b)-R(a)=b-a$

이때 $a\neq b$이므로

$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)

ㄷ. $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$에서

$af(b)-bf(a)=abp+aq-(abp+bq)$

$=(a-b)q$

이때 $R(0)=q$이므로

$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

03 인수분해

교과서 문제 정/복/하/기

본문 33쪽

0191 $1-x-y+xy=1-x-y(1-x)=(1-x)(1-y)$

답 $(1-x)(1-y)$

0192 $ac-bd-ad+bc=ac-ad-bd+bc$
$=a(c-d)+b(c-d)$
$=(a+b)(c-d)$

답 $(a+b)(c-d)$

0193 $4x^2+20xy+25y^2=(2x)^2+2\times2x\times5y+(5y)^2$
$=(2x+5y)^2$ 답 $(2x+5y)^2$

0194 $64x^2-9y^2=(8x)^2-(3y)^2$
$=(8x+3y)(8x-3y)$

답 $(8x+3y)(8x-3y)$

0195 $(2x+y)^2-(x-y)^2$
$=(2x+y+x-y)\{2x+y-(x-y)\}$
$=3x(x+2y)$ 답 $3x(x+2y)$

0196 $x^2+8x+12=x^2+(2+6)x+2\times6$
$=(x+2)(x+6)$ 답 $(x+2)(x+6)$

0197 $3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$ 답 $(x+2)(3x-4)$

0198 $6x^2+5xy-6y^2=(2x+3y)(3x-2y)$

답 $(2x+3y)(3x-2y)$

0199 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2\times c\times a$
$=(a-b+c)^2$ 답 $(a-b+c)^2$

0200 $x^2+y^2+1+2(xy+x+y)$
$=x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times1+2\times1\times x$
$=(x+y+1)^2$ 답 $(x+y+1)^2$

0201 $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$
$=(x-2)^3$ 답 $(x-2)^3$

0202 $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
$=x^3+3\times x^2\times3y+3\times x\times(3y)^2+(3y)^3$
$=(x+3y)^3$ 답 $(x+3y)^3$

0203 $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

0204 $a^4+a^2+1=a^4+a^2\times1^2+1^4$
$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

답 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

0205 $x^4+4x^2y^2+16y^4=x^4+x^2\times(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0206 $a^3-b^3+c^3+3abc$
$=a^3+(-b)^3+c^3-3\times a\times(-b)\times c$
$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

답 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

0207 $x^3+y^3-3xy+1$
$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times1$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

답 $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

0208 $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-3(x+1)+2=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$
$=(x+1-1)(x+1-2)$
$=x(x-1)$ 답 $x(x-1)$

0209 $x^2+5x=t$로 놓으면
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$
$=(t+4)(t+2)-24=t^2+6t-16=(t+8)(t-2)$
$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

답 $(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

0210 $x+1=X$, $x-3=Y$로 놓으면
$2(x+1)^2+(x+1)(x-3)-(x-3)^2$
$=2X^2+XY-Y^2=(2X-Y)(X+Y)$
$=\{2(x+1)-(x-3)\}(x+1+x-3)$
$=(x+5)(2x-2)=2(x+5)(x-1)$ 답 $2(x+5)(x-1)$

0211 $x^2=t$로 놓으면
$x^4+5x^2-6=t^2+5t-6=(t-1)(t+6)$
$=(x^2-1)(x^2+6)=(x+1)(x-1)(x^2+6)$

답 $(x+1)(x-1)(x^2+6)$

0212 $x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$
$=(x^2+5)^2-x^2$
$=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

답 $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

0213 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2xy-3x+3y+2 &= x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2 \\ &= x^2-(2y+3)x+(y+1)(y+2) \\ &= \{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\} \\ &= (x-y-1)(x-y-2) \end{aligned}$$

답 $(x-y-1)(x-y-2)$

0214 주어진 식을 차수가 가장 낮은 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} y^2+xy-a^2-ax &= (y-a)x+y^2-a^2 \\ &= (y-a)x+(y+a)(y-a) \\ &= (y-a)(x+y+a) \end{aligned}$$

답 $(y-a)(x+y+a)$

0215 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2-x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

답 $(x-1)(x+2)(x-3)$

0216 $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$이라 하면

$f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

답 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

유형 익히기

본문 34~38쪽

0217 ③ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$ 답 ③

0218
$$\begin{aligned} x^2-y^2-x+y &= x^2-y^2-(x-y) \\ &= (x+y)(x-y)-(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0219 $x^2-(2a+3)x+(a+1)(a+2)$

$=\{x-(a+1)\}\{x-(a+2)\}=(x-a-1)(x-a-2)$

이때 두 일차식의 합이 $2x+1$이므로

$(x-a-1)+(x-a-2)=2x+1$

$2x-2a-3=2x+1$, $-2a-3=1$ $\quad\therefore a=-2$ 답 -2

0220 $a^4+2a^2c^2-2b^2c^2-b^4$

$=(a^4-b^4)+2c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)+2c^2(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2+2c^2)=(a+b)(a-b)(a^2+b^2+2c^2)$

답 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2+2c^2)$

0221 $(a-2b)^3-125b^3$

$=(a-2b)^3-(5b)^3$

$=(a-2b-5b)\{(a-2b)^2+(a-2b)\times 5b+(5b)^2\}$

$=(a-7b)(a^2-4ab+4b^2+5ab-10b^2+25b^2)$

$=(a-7b)(a^2+ab+19b^2)$ 답 ④

0222
$$\begin{aligned} x^6-y^6 &= (x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3) \\ &= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

따라서 x^6-y^6의 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0223 ㄱ. $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

ㄴ. $27x^3-64y^3=(3x)^3-(4y)^3$

$\qquad=(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

ㄷ. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

$\quad=x^3-3\times x^2\times 2y+3\times x\times(2y)^2-(2y)^3$

$\quad=(x-2y)^3$

ㄹ. $x^3-y^3+8z^3+6xyz$

$\quad=x^3+(-y)^3+(2z)^3-3\times x\times(-y)\times 2z$

$\quad=(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0224 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-12)+24$

$\qquad=t^2-14t+48=(t-6)(t-8)$

$\qquad=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$\qquad=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-8$ 또는 $a=-2$, $b=3$, $c=-8$이므로

$a+b+c=-7$ 답 ③

0225 $x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+2)(t-5)+6=t^2-3t-4$

$\qquad=(t+1)(t-4)$

$\qquad=(x^2-x+1)(x^2-x-4)$

답 $(x^2-x+1)(x^2-x-4)$

0226 $(x^2-2x)^2+2x^2-4x-15$
$=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-15$
$x^2-2x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2+2t-15=(t-3)(t+5)$
$\quad=(x^2-2x-3)(x^2-2x+5)$
$\quad=(x+1)(x-3)(x^2-2x+5)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0227 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$
$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$
······ ㉮
$x^2-5x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+k$
$\quad=t^2+10t+24+k$ ······ ㉠
······ ㉯
주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로
$24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25 \quad \therefore k=1$
······ ㉰
답 **1**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개하기	40 %
㉯	공통부분을 치환하여 정리하기	20 %
㉰	k의 값 구하기	40 %

0228 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$
$\quad=(x^2-1)(x^2-4)$
$\quad=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
이때 $a<b<c<d$이므로
$a=-2,\ b=-1,\ c=1,\ d=2$
$\therefore ad-bc=-3$ 답 **−3**

0229 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-50x^2+625=X^2-50X+625=(X-25)^2$
$\quad=(x^2-25)^2=\{(x+5)(x-5)\}^2$
$\quad=(x+5)^2(x-5)^2$
이때 $a>b$이므로 $a=5,\ b=-5$
$\therefore a-b=10$ 답 **10**

0230 $a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2$
$\quad=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0231 $x^4-6x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$
$\quad=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$\quad=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$
따라서 $a=2,\ b=1$ 또는 $a=-2,\ b=1$이므로
$a^2+b^2=5$ 답 **5**

0232 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$x^2+xy-2y^2+x+5y-2=x^2+(y+1)x-(2y^2-5y+2)$
$\quad=x^2+(y+1)x-(2y-1)(y-2)$
$\quad=\{x+(2y-1)\}\{x-(y-2)\}$
$\quad=(x+2y-1)(x-y+2)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0233 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$x^3-(2+y)x^2+(2y-3)x+3y$
$=(-x^2+2x+3)y+x^3-2x^2-3x$
$=-(x^2-2x-3)y+x(x^2-2x-3)$
$=(x^2-2x-3)(x-y)$
$=(x+1)(x-3)(x-y)$ 답 $\boldsymbol{(x+1)(x-3)(x-y)}$

0234 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$2x^2+2y^2+5xy+3x+3y+1$
$=2x^2+(5y+3)x+(2y^2+3y+1)$
$=2x^2+(5y+3)x+(y+1)(2y+1)$
$=(x+2y+1)(2x+y+1)$
따라서 $a=1,\ b=2,\ c=2$이므로 $a+b+c=5$ 답 ③

0235 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-xy-6y^2+ax+8y-2$
$=x^2-(y-a)x-(6y^2-8y+2)$
$=x^2-(y-a)x-2(3y^2-4y+1)$
$=x^2-(y-a)x-2(3y-1)(y-1)$
······ ㉮
주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$2(y-1)-(3y-1)=-(y-a)$
······ ㉯
$-y-1=-y+a \quad \therefore a=-1$
······ ㉰
답 **−1**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하기	40 %
㉯	주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건 알기	40 %
㉰	a의 값 구하기	20 %

0236 $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$라 하면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)=(x+1)(2x+1)(x-2)$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-2$ 또는 $a=-2$, $b=1$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=1^2+1^2+(-2)^2=6$ 답 **6**

0237 $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$이라 하면

$f(1)=0$, $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \\ & & 3 & 3 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x-3)(x+2)$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0238 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1+2+4+a=0$ $\quad\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-4x-5$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -4 & -5 \\ & & -1 & -1 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$

따라서 $f(x)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0239 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$라 하면

$f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로

$f(-1)=-1+a-b+2=0$ $\quad\therefore b=a+1$ …… ㉠

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+(a+1)x+2$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & a+1 & 2 \\ & & -1 & -a+1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & a-1 & 2 & \boxed{0} \\ & & -1 & -a+2 & \\ \hline & 1 & a-2 & \boxed{-a+4} & \end{array}$$

$f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 $-a+4=0$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=4+1=5$

$\therefore ab=4\times5=20$ 답 ⑤

0240 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$

$=ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+a^2b+ca^2+2abc+b^2c-4abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 $\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

참고 b나 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0241 $[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0242 주어진 식의 분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$ 답 **−1**

0243 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1$

$=x^2\left(x^2+5x-4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+5x+\dfrac{5}{x}-4\right)$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6\right\}=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+6\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)$

$=x\left(x+\dfrac{1}{x}+6\right)\times x\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)=(x^2+6x+1)(x^2-x+1)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0244 $x^4+3x^3-8x^2+3x+1$

$=x^2\left(x^2+3x-8+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-8\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-10\right\}$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+5\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+5x+1)(x^2-2x+1)=(x^2+5x+1)(x-1)^2$

따라서 $a=5$, $b=1$, $c=1$이므로

$abc=5$ 답 **5**

0245 $x^4+4x^3+5x^2+4x+1$

$=x^2\left(x^2+4x+5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)$

$=(x^2+x+1)(x^2+3x+1)$

따라서 두 이차식의 합은

$(x^2+x+1)+(x^2+3x+1)=2x^2+4x+2$ 답 ③

0246 $a^3-b^3+a^2b-ab^2=a^3+a^2b-ab^2-b^3$

$=a^2(a+b)-b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-b^2)$

$=(a+b)(a+b)(a-b)$

$=(a+b)^2(a-b)$

$=\{(a-b)^2+4ab\}(a-b)$

$=(3^2+4\times2)\times3=51$

답 **51**

0247 $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$에서

$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=1$

$\therefore x^4-yx^3-y^3x+y^4=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$=(x-y)(x^3-y^3)$

$=(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)^2\{(x+y)^2-xy\}$

$=(2\sqrt{3})^2\times(4^2-1)=180$

답 **180**

0248 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

.... ㉮

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

.... ㉯

$=2\times3\times4=24$

.... ㉰

답 **24**

단계	채점요소	배점
㉮	한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하기	40%
㉯	주어진 식을 인수분해하기	40%
㉰	식의 값 구하기	20%

0249 $a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$\times\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $a+b+c>0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\quad\therefore a=b=c$

$\therefore \frac{b-c}{a}-\frac{a}{b}+\frac{a+b}{c}=0-\frac{b}{b}+\frac{2c}{c}=-1+2=1$ 답 ④

0250 $100=x$로 놓으면

$\frac{99^3\times101^3}{9998\times10000+1}=\frac{(x-1)^3(x+1)^3}{(x^2-2)x^2+1}$

$=\frac{(x^2-1)^3}{x^4-2x^2+1}=\frac{(x^2-1)^3}{(x^2-1)^2}$

$=x^2-1=100^2-1=9999$ 답 **9999**

0251 $15^2-13^2+11^2-9^2+7^2-5^2+3^2-1^2$

$=(15+13)(15-13)+(11+9)(11-9)$

$+(7+5)(7-5)+(3+1)(3-1)$

$=28\times2+20\times2+12\times2+4\times2$

$=2(28+20+12+4)=2\times64=128$ 답 ③

0252 $f(1)=0$, $f(-2)=0$이므로 $f(x)$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ & & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)=(x-1)^3(x+2)$

$\therefore f(11)=(11-1)^3(11+2)=1000\times13=13000$ 답 ③

0253 $21=x$로 놓으면

$21\times23\times25\times27+15=x(x+2)(x+4)(x+6)+15$

$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15$

$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15$

$=t(t+8)+15 \quad \leftarrow x^2+6x=t$

$=t^2+8t+15=(t+3)(t+5)$

$=(x^2+6x+3)(x^2+6x+5)$

$=(x^2+6x+3)(x^2+6x+3+2)$

$=n(n+2)$

$\therefore n=x^2+6x+3=21^2+6\times21+3=570$ 답 **570**

유형 up

본문 39쪽

0254 $16-9x^2+6xy-y^2=16-(9x^2-6xy+y^2)$

$=4^2-(3x-y)^2$

$=(4+3x-y)(4-3x+y)$

이때 $3x+y+4=0$에서

$4+3x=-y$, $y+4=-3x$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-y-y)(-3x-3x)$

$=(-2y)(-6x)=12xy$

답 ④

0255 $xy+z=1$에서 $z=1-xy$를 주어진 식에 대입하면

$2xy-x^2y-xy^2-xyz$

$=2xy-x^2y-xy^2-xy(1-xy)$

$=x^2y^2-x^2y-xy^2+xy$

$=xy(xy-x-y+1)$

$=xy(x-1)(y-1)$

이때 $xy+z=1$에서 $xy=1-z$

$\therefore$ (주어진 식)$=(1-z)(x-1)(y-1)$

$=(1-x)(1-y)(1-z)$

답 ③

0256 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$xyz+x^2y+xy-x-z-1$

$=xy(x+z+1)-(x+z+1)$

$=(x+z+1)(xy-1)$

이때 $x+y+z=-1$이므로 $x+z+1=-y$

$\therefore$ (주어진 식)$=-y(xy-1)$

답 ④

0257 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>0$

즉, $-c^2+a^2+b^2=0$이므로

$a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0258 $b^2-ba-c^2+ca=(c-b)a+b^2-c^2$

$=(c-b)a+(b-c)(b+c)$

$=(c-b)a-(c-b)(b+c)$

$=(c-b)\{a-(b+c)\}$

$=(c-b)(a-b-c)=0$

······ ㉮

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$

즉, $a-b-c\neq0$이므로

$c-b=0$ $\quad\therefore b=c$

······ ㉯

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

······ ㉰

답 $b=c$인 이등변삼각형

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식의 좌변을 인수분해하기	50 %
㉯	a, b, c 사이의 관계식 구하기	30 %
㉰	삼각형의 모양 구하기	20 %

0259 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

즉, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

정삼각형의 둘레의 길이가 6이므로

$a+b+c=3a=6$ $\quad\therefore a=2$

따라서 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

시험에 꼭 나오는 문제

본문 40~41쪽

0260 ① $16x^2-36y^2=(4x)^2-(6y)^2$

$=(4x+6y)(4x-6y)$

$=4(2x+3y)(2x-3y)$

② $x^4-16=(x^2)^2-4^2$

$=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

③ $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

④ $x^2-y^2+2yz-z^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-(y-z)^2$

$=(x+y-z)(x-y+z)$

⑤ $a^3-a^2c-ab^2+b^2c=a^2(a-c)-b^2(a-c)$
$=(a-c)(a^2-b^2)$
$=(a-c)(a+b)(a-b)$ 답 ④

0261 $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$
$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-24$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$
$x^2+3x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t(t+2)-24=t^2+2t-24$
$=(t+6)(t-4)$
$=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$
$=(x^2+3x+6)(x+4)(x-1)$
따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

0262 $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$
$=(x^2+4)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=4$이므로
$a+b+c+d=2+4+2+4=12$ 답 **12**

0263 $x^4+5x^2+9=x^4+6x^2+9-x^2$
$=(x^2+3)^2-x^2$
$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$
$x^4+2x^3+x^2-9=x^2(x^2+2x+1)-9$
$=x^2(x+1)^2-9$
$=(x^2+x)^2-3^2$
$=(x^2+x+3)(x^2+x-3)$
따라서 두 다항식의 공통인수는 x^2+x+3이다. 답 ③

0264 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$
$=(x+2y+1)(x+y-2)$
따라서 두 일차식의 합은
$(x+2y+1)+(x+y-2)=2x+3y-1$ 답 ⑤

0265 $f(x)=3x^3+ax^2-5x+2$라 하면
$f(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로
$f(2)=24+4a-10+2=0$ $\quad\therefore a=-4$
따라서 $f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ & & 6 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(3x^2+2x-1)$
$=(x-2)(x+1)(3x-1)$
따라서 $b=1$, $c=-1$이므로 $a+b-c=-2$ 답 **−2**

0266 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$
$+z^3-3z^2x+3zx^2-x^3$
$=-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2-3z^2x+3zx^2$
$=-3\{(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2\}$
$=-3\{(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+(y-z)yz\}$
$=-3(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
$=-3(y-z)(x-y)(x-z)$
$=3(x-y)(y-z)(z-x)$ 답 $\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}$

0267 $x^4-2x^3-13x^2-2x+1$
$=x^2\left(x^2-2x-13-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-15\right\}$
$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-5\right)$
$=(x^2+3x+1)(x^2-5x+1)$ 답 ④

0268 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$3^2=1+2(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca=4$
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서
$a^3+b^3+c^3-3\times1=3\times(1-4)$
$\therefore a^3+b^3+c^3=-6$ 답 **−6**

0269 $11=x$로 놓으면
$11\times12\times13\times14+1$
$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1$
$=(x^2+3x+1)^2$
$=(11^2+3\times11+1)^2$
$=155^2$
$\therefore \sqrt{11\times12\times13\times14+1}=\sqrt{155^2}=155$ 답 **155**

0270 $1-a^2-4b^2+4ab=1-(a^2+4b^2-4ab)$
$=1^2-(a-2b)^2$
$=(1+a-2b)(1-a+2b)$
이때 $a+2b+1=0$에서 $1+a=-2b$, $1+2b=-a$
$\therefore$ (주어진 식)$=(-2b-2b)(-a-a)$
$=(-4b)(-2a)=8ab$ 답 ⑤

다른풀이 $a+2b+1=0$에서 $a=-2b-1$

$\therefore 1-a^2-4b^2+4ab=1-(-2b-1)^2-4b^2+4(-2b-1)b$
$=1-4b^2-4b-1-4b^2-8b^2-4b$
$=-16b^2-8b$
$=8b(-2b-1)=8ab$

0271 두 정육면체의 부피의 차가 7이므로

$a^3-b^3=7$

$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=7$ …… ㉠

두 정육면체의 한 면의 둘레의 길이의 차가 4이므로

$4a-4b=4 \quad \therefore a-b=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+ab+b^2=7$

답 7

0272 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-4x-4$라 하면

$f(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(1)=1+a+b-4-4=0$

$\therefore a+b=7$ …… ㉠

$f(2)=16+8a+4b-8-4=0$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-8$, $b=15$

…… ㉮

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2-4x-4$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -8 & 15 & -4 & -4 \\ & & 1 & -7 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -7 & 8 & 4 & 0 \\ & & 2 & -10 & -4 & \\ \hline & 1 & -5 & -2 & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-5x-2)$

따라서 $Q(x)=x^2-5x-2$이므로

…… ㉯

$Q(-3)=9+15-2=22$

…… ㉰

답 22

단계	채점요소	배점
㉮	a, b의 값 구하기	40 %
㉯	$Q(x)$ 구하기	40 %
㉰	$Q(-3)$의 값 구하기	20 %

0273 $ab(a+b)-bc(b+c)+ca(a-c)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2+ca^2-c^2a$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a-c)(a+b)=0$

…… ㉮

이때 $a+b>0$, $b+c>0$이므로

$a-c=0 \qquad \therefore a=c$

…… ㉯

$a=c$를 $a^2-ac+c^2=4$에 대입하면

$a^2-a^2+a^2=4$, $a^2=4$

$\therefore a=c=2$ ($\because a>0$)

$\therefore a^3+c^3=2^3+2^3=16$

…… ㉰

답 16

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식의 좌변을 인수분해하기	40 %
㉯	$a=c$임을 알기	20 %
㉰	a^3+c^3의 값 구하기	40 %

0274 $15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$f(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-x+1)$
$=(15+2)(15^2-15+1)$
$=17\times 211$

따라서 $a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$이므로

$a+b=228$

답 228

0275 $\sqrt{5}=x$, $\sqrt{2}=y$라 하면

A상자 한 개의 부피는 x^3, B상자 한 개의 부피는 x^2y, C상자 한 개의 부피는 xy^2, D상자 한 개의 부피는 y^3이다.

따라서 A상자 1개, B상자 6개, C상자 12개, D상자 8개를 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 만든 정육면체의 부피는

$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$=x^3+3\times x^2\times 2y+3\times x\times (2y)^2+(2y)^3$

$=(x+2y)^3$

이므로 정육면체의 한 모서리의 길이는 $x+2y$이다.

즉, $x+2y=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$이므로

$a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$

답 3

04 복소수

교과서 문제 정/복/하/기

본문 45쪽

0276 답 **실수부분 : 0, 허수부분 : 4**

0277 답 **실수부분 : $1+\sqrt{2}$, 허수부분 : 0**

0278 답 **실수부분 : -5, 허수부분 : $-\sqrt{3}$**

0279 답 **실수부분 : $\frac{3}{2}$, 허수부분 : $-\frac{1}{2}$**

0280 $a+bi$에서 $b=0$이면 실수, $b\neq0$이면 허수, $a=0$, $b\neq0$이면 순허수이다.
ㄷ. $4i^2=-4$
따라서 실수는 ㄷ, ㅁ, ㅂ, 허수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ, 순허수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 **풀이 참조**

0281 $3x+(y-1)i=6-i$에서
$3x=6$, $y-1=-1$
$\therefore x=2,\ y=0$ 답 $\boldsymbol{x=2,\ y=0}$

0282 $(x+1)+(y-1)i=2+4i$에서
$x+1=2$, $y-1=4$
$\therefore x=1,\ y=5$ 답 $\boldsymbol{x=1,\ y=5}$

0283 $(x-y)+(2x+3y)i=3+i$에서
$x-y=3$, $2x+3y=1$
두 식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=-1$ 답 $\boldsymbol{x=2,\ y=-1}$

0284 $\overline{-5+7i}=-5-7i$ 답 $\boldsymbol{-5-7i}$

0285 $\overline{3i-1}=-3i-1$ 답 $\boldsymbol{-3i-1}$

0286 $\overline{i}=-i$ 답 $\boldsymbol{-i}$

0287 $\overline{7}=7$ 답 **7**

0288 $(5+i)+(-2+6i)=(5-2)+(1+6)i$
$=3+7i$ 답 $\boldsymbol{3+7i}$

0289 $(7+2i)-(4-3i)=(7-4)+(2+3)i$
$=3+5i$ 답 $\boldsymbol{3+5i}$

0290 $(3+4i)(1-2i)=3-6i+4i-8i^2$
$=3-2i-8\times(-1)$
$=11-2i$ 답 $\boldsymbol{11-2i}$

0291 $\frac{5-3i}{1+i}=\frac{(5-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5-5i-3i+3i^2}{1-i^2}$
$=\frac{2-8i}{2}=1-4i$ 답 $\boldsymbol{1-4i}$

0292 $x^2+xy+y^2=(2+i)^2+(2+i)(2-i)+(2-i)^2$
$=(3+4i)+(4+1)+(3-4i)$
$=11$ 답 **11**

다른풀이 $x=2+i$, $y=2-i$이므로
$x+y=(2+i)+(2-i)=4$, $xy=(2+i)(2-i)=5$
$\therefore x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$
$=4^2-5=11$

0293 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}=\frac{2-i+2+i}{(2+i)(2-i)}$
$=\frac{4}{4-i^2}=\frac{4}{5}$ 답 $\boldsymbol{\frac{4}{5}}$

다른풀이 $x+y=4$, $xy=5$이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{5}$

0294 $i^{25}=(i^4)^6\times i=i$ 답 $\boldsymbol{i}$

0295 $(-i)^5=-i^5=-i^4\times i=-i$ 답 $\boldsymbol{-i}$

0296 $-i^7=-i^4\times i^3=-(-i)=i$ 답 $\boldsymbol{i}$

0297 $i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}=1+1=2$ 답 **2**

0298 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ 답 $\boldsymbol{\sqrt{3}i}$

0299 $\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$ 답 $\boldsymbol{5i}$

0300 $-\sqrt{-32}=-\sqrt{32}i=-4\sqrt{2}i$ 답 $\boldsymbol{-4\sqrt{2}i}$

0301 $\pm\sqrt{-1}=\pm i$ 답 $\boldsymbol{\pm i}$

0302 $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ 답 $\pm2\sqrt{2}i$

0303 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$ 답 -4

0304 $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{15}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{5}i$ 답 $-\sqrt{5}i$

0305 $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{4}i}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0306 $\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-16}}=\sqrt{3}i\times\sqrt{6}i-\dfrac{2\sqrt{2}}{4i}$

$=\sqrt{18}i^2-\dfrac{\sqrt{2}i}{2i^2}$

$=-3\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

답 $-3\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

유형 익/히/기

본문 46~50쪽

0307 ① 모든 실수는 복소수이므로 0도 복소수이다.
③ $2-5i$는 순허수가 아니다.
⑤ -9의 제곱근은 $\pm\sqrt{-9}=\pm3i$이다.
따라서 옳은 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

0308 $1+\sqrt{-4}=1+2i$, $i^2+1=-1+1=0$
따라서 보기 중 허수는 $3i$, $1+\sqrt{-4}$, $2-5i$의 3개이다. 답 3

0309 $(1+2i)(4-5i)+\dfrac{-1+3i}{1+i}$
$=4-5i+8i-10i^2+\dfrac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=14+3i+\dfrac{-1+i+3i-3i^2}{2}$
$=14+3i+1+2i=15+5i$
따라서 $a=15$, $b=5$이므로
$a+b=20$ 답 20

0310 $3(1+4i)+(4-5i)-7(2-i)$
$=3+12i+4-5i-14+7i$
$=-7+14i$ 답 $-7+14i$

0311 $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$
$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$
$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i$
$=2$ 답 ②

0312 $(3-i)*(2+5i)$
$=2(3-i)(2+5i)-(3-i)+(2+5i)$
$=2(6+15i-2i-5i^2)-3+i+2+5i$
$=22+26i-1+6i$
$=21+32i$
따라서 구하는 실수부분은 21이다. 답 21

0313 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3x-1=\sqrt{2}i$
양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1=-2$
$9x^2-6x=-3$ $\therefore 3x^2-2x=-1$
$\therefore 6x^2-4x+3=2(3x^2-2x)+3$
$=2\times(-1)+3=1$ 답 ④

0314 $z=\dfrac{3-i}{1-i}=\dfrac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$에서
$z-2=i$
양변을 제곱하면 $z^2-4z+4=-1$
$\therefore z^2-4z+5=0$
$\therefore z^3-4z^2+5z+3=z(z^2-4z+5)+3$
$=z\times0+3=3$ 답 ③

0315 $x^2+(i-5)x-i+4=(x^2-5x+4)+(x-1)i$
이 복소수가 순허수가 되려면
$x^2-5x+4=0$, $x-1\neq0$
(i) $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
(ii) $x-1\neq0$에서 $x\neq1$
(i), (ii)에서 $x=4$ 답 4

0316 $z=i(x+i)^2=i(x^2+2xi-1)$
$=-2x+(x^2-1)i$ ...... ㉠
z가 실수가 되려면
$x^2-1=0$, $x^2=1$ $\therefore x=\pm1$
이때 음수 x의 값이 a이므로 $a=-1$
$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $z=2$이므로 $b=2$
$\therefore a-b=-3$ 답 -3

0317 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로
.... ㉮
$a^2-3a+2=0$ 또는 $a^2+a-2=0$
(i) $a^2-3a+2=0$에서 $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
(ii) $a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$
(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$
.... ㉯

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$(-2)+1+2=1$ ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수임을 알기	30 %
㉯	a의 값 구하기	50 %
㉰	a의 값의 합 구하기	20 %

0318 $z=(1+i)a^2+(2+i)a-(3+2i)$
$=(a^2+2a-3)+(a^2+a-2)i$
z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로
$a^2+2a-3\neq 0$, $a^2+a-2=0$
(i) $a^2+2a-3\neq 0$에서 $(a+3)(a-1)\neq 0$
$\therefore a\neq -3$, $a\neq 1$
(ii) $a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$
(i), (ii)에서 $a=-2$

답 ②

0319 $(3+2i)x+(2-3i)y=5-i$에서
$3x+2xi+2y-3yi=5-i$
$(3x+2y)+(2x-3y)i=5-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3x+2y=5$, $2x-3y=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$
$\therefore x+y=2$

답 2

0320 $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1+i}=\dfrac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}$
$=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i$
즉, $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i=10-7i$이므로
$(x+y)+(x-y)i=20-14i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=20$, $x-y=-14$
두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=17$
$\therefore 2x-y=-11$

답 -11

0321 $(1+2i)x+\dfrac{2-yi}{1-2i}=3-2i$의 양변에 $1-2i$를 곱하면
$(1+2i)(1-2i)x+2-yi=(3-2i)(1-2i)$
$5x+2-yi=-1-8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$5x+2=-1$, $-y=-8$ $\quad\therefore x=-\dfrac{3}{5}$, $y=8$
$\therefore 5x+y=5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+8=5$

답 5

다른풀이 $(1+2i)x+\dfrac{2-yi}{1-2i}$
$=(1+2i)x+\dfrac{(2-yi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$=(1+2i)x+\dfrac{(2+2y)+(4-y)i}{5}$
$=\dfrac{5x+2y+2}{5}+\dfrac{10x-y+4}{5}i$
즉, $\dfrac{5x+2y+2}{5}+\dfrac{10x-y+4}{5}i=3-2i$이므로
$(5x+2y+2)+(10x-y+4)i=15-10i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$5x+2y+2=15$, $10x-y+4=-10$
$\therefore 5x+2y=13$, $10x-y=-14$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-\dfrac{3}{5}$, $y=8$
$\therefore 5x+y=5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+8=5$

0322 $x^2+y^2i+2x+2yi-3-8i=0$에서
$(x^2+2x-3)+(y^2+2y-8)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+2x-3=0$, $y^2+2y-8=0$
(i) $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
(ii) $y^2+2y-8=0$에서
$(y+4)(y-2)=0$ $\quad\therefore y=-4$ 또는 $y=2$
(i), (ii)에서 $x+y$의 값은
① $-3+(-4)=-7$ ③ $1+(-4)=-3$
④ $-3+2=-1$ ⑤ $1+2=3$
따라서 $x+y$의 값이 될 수 없는 것은 ② -5이다.

답 ②

0323 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\bar{z}=a-bi$이므로
ㄱ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서
$a=0$, $b=0$ $\quad\therefore z=0$
ㄴ. $\bar{z}=a-bi$가 순허수이면
$a=0$, $b\neq 0$
따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.
ㄷ. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$
$=\dfrac{a-bi+a+bi}{a^2+b^2}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$
즉, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$은 실수이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0324 $\bar{z}=-z$에서 $z+\bar{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다.
④ $z=i(1-i)=i+1$
⑤ $z=(\sqrt{5}i-1)i^2=-\sqrt{5}i+1$
따라서 조건을 만족시키는 복소수 z는 ②이다.

답 ②

0325 $z=\bar{z}$이고 $z\neq 0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(x^2-4)+(x^2-x-2)i$에서

$x^2-4\neq 0$, $x^2-x-2=0$

(i) $x^2-4\neq 0$에서 $(x+2)(x-2)\neq 0$

$\therefore x\neq -2$, $x\neq 2$

(ii) $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 답 **-1**

0326 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$(1+i)z+3\bar{z}=10-i$에서

$(1+i)(a+bi)+3(a-bi)=10-i$

$a+bi+ai-b+3a-3bi=10-i$

$(4a-b)+(a-2b)i=10-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4a-b=10$, $a-2b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore z=3+2i$ 답 ④

0327 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$(1+i)\bar{z}+(1-i)z=4$에서

$(1+i)(a-bi)+(1-i)(a+bi)=4$

$a-bi+ai+b+a+bi-ai+b=4$

$2a+2b=4$ $\quad\therefore a+b=2$

따라서 보기에서 $a+b=2$를 만족시키는 복소수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0328 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

…… ㉮

$z\bar{z}=7$에서 $(a+bi)(a-bi)=7$ $\quad\therefore a^2+b^2=7$ …… ㉠

$z\bar{z}=7$에서 $\bar{z}=\frac{7}{z}$이므로 $z+\frac{7}{z}=z+\bar{z}=4$

즉, $(a+bi)+(a-bi)=4$이므로 $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

…… ㉯

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$4+b^2=7$, $b^2=3$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{3}$

…… ㉰

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

…… ㉱

답 **$2\pm\sqrt{3}i$**

단계	채점요소	배점
㉮	$z=a+bi$로 놓기	20%
㉯	a의 값 구하기	40%
㉰	b의 값 구하기	30%
㉱	복소수 z를 모두 구하기	10%

0329 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$\quad=(a+b)+(b-a)i$

이므로

$\overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i=2+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2$, $-(b-a)=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$이므로

$2z-i=2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i=3$ 답 **3**

0330 $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{3002}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{2997}+i^{2998}+i^{2999}+i^{3000})+i^{3001}+i^{3002}$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$

$=i-1$ 답 ④

0331 $i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$

$=(i-2-3i+4)+\cdots+(45i-46-47i+48)+49i-50$

$=(2-2i)+\cdots+(2-2i)+49i-50$

$=12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

따라서 $x=-26$, $y=25$이므로

$x+y=-1$ 답 **-1**

0332 $x=1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}$

$=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\left(\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}\right)$
$\quad+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^9}+\frac{1}{i^{10}}$

$=\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+1+\frac{1}{i}-1$

$=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore x+\frac{2}{x}=-i+\frac{2}{-i}=-i+2i=i$ 답 ⑤

0333 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2051}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2051}=i^{2051}-(-i)^{2051}$

$=(i^4)^{512}\times i^3-\{(-i)^4\}^{512}\times(-i)^3$

$=i^3-(-i)^3$

$=2i^3=-2i$ 답 ①

0334 $(1-i)^{30}=\{(1-i)^2\}^{15}=(-2i)^{15}$

$=(-2)^{15}\times(i^4)^3\times i^3=2^{15}i$

$(1+i)^{30}=\{(1+i)^2\}^{15}=(2i)^{15}$
$=2^{15}\times(i^4)^3\times i^3=-2^{15}i$
$\therefore (1-i)^{30}+(1+i)^{30}=2^{15}i+(-2^{15}i)=0$ 답 **0**

0335 $z^2=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로 $z^4=-1$

$\therefore 1+z^2+z^4+z^6+z^8=(1+z^2)+z^4(1+z^2)+z^8$
$=(1+z^2)-(1+z^2)+z^8$
$=z^8=(z^4)^2$
$=(-1)^2=1$ 답 **1**

다른풀이 $z^2=-i$이므로
$1+z^2+z^4+z^6=1-i-1+i=0$
$\therefore 1+z^2+z^4+z^6+z^8=0+z^8=(z^2)^4$
$=(-i)^4=1$

0336 $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\therefore f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)=f(-i)+f(i)$
$=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{1002}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1002}$
$=(-i)^{1002}+i^{1002}$
$=\{(-i)^4\}^{250}\times(-i)^2+(i^4)^{250}\times i^2$
$=-1-1$
$=-2$ 답 ⑤

0337 ① $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$
② $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$
③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$
④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=-\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0338 $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-4}}+\sqrt{-2}\sqrt{-6}$
$=\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}i}+\dfrac{\sqrt{48}i}{\sqrt{4}i}+\sqrt{2}i\times\sqrt{6}i$
$=-4i+\sqrt{12}-\sqrt{12}=-4i$
··· ㉮
따라서 $-4i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=0$, $b=-4$
··· ㉯
$\therefore a-b=4$
··· ㉰
답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식의 좌변을 간단히 하기	60%
㉯	a, b의 값 구하기	20%
㉰	$a-b$의 값 구하기	20%

0339 $(\sqrt{3}+\sqrt{-3})(2\sqrt{3}-\sqrt{-3})+\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$
$=(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)+\sqrt{3}i\times3\sqrt{3}i+\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$
$=6-3i+6i+3-9-3i=0$ 답 **0**

0340 $-1<x<1$이므로
$x+1>0$, $x-1<0$, $1-x>0$, $-x-1<0$
$\therefore \sqrt{x+1}\times\sqrt{x-1}\times\sqrt{1-x}\times\sqrt{-x-1}$
$=\sqrt{x+1}\times\sqrt{-(1-x)}\times\sqrt{1-x}\times\sqrt{-(x+1)}$
$=\sqrt{x+1}\times\sqrt{1-x}i\times\sqrt{1-x}\times\sqrt{x+1}i$
$=\sqrt{1-x^2}i\times\sqrt{1-x^2}i$
$=-(1-x^2)=x^2-1$ 답 $\boldsymbol{x^2-1}$

0341 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$
$\therefore \sqrt{(a-b)^2}-2|a|+\sqrt{b^2}=|a-b|-2|a|+|b|$
$=a-b-2a-b$
$=-a-2b$ 답 $\boldsymbol{-a-2b}$

0342 $\dfrac{\sqrt{4-a}}{\sqrt{1-a}}=-\sqrt{\dfrac{4-a}{1-a}}$이므로 $4-a>0$, $1-a<0$
따라서 $a-1>0$, $a-4<0$이므로
$\sqrt{(a-1)^2}+|a-4|=|a-1|+|a-4|$
$=(a-1)-(a-4)=3$ 답 **3**

0343 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$
ㄱ. $\sqrt{ab^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$
ㄴ. $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
ㄷ. $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|=(-a)\times(-b)=ab$
ㄹ. $a+b<0$이므로 $|a+b|=-a-b$
$|a|+|b|=-a-b$
$\therefore |a+b|=|a|+|b|$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ④

유형 up

본문 51쪽

0344 ㄱ. $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$
$\alpha=\overline{\alpha}$에서 $a+bi=a-bi$ $\quad\therefore b=0$
따라서 $\alpha=a$이므로 실수이다.

ㄴ. $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이다.

ㄷ. $\overline{(\alpha-i)(\beta+i)}=\overline{(\alpha-i)}\times\overline{(\beta+i)}$

$=(\overline{\alpha}+i)\times(\overline{\beta}-i)$

$=\overline{\alpha}\overline{\beta}-\overline{\alpha}i+\overline{\beta}i+1$

$=\overline{\alpha}\overline{\beta}-(\overline{\alpha}-\overline{\beta})i+1$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

0345 $z+\omega$, $z\omega$가 모두 실수이므로 z와 ω는 서로 켤레복소수이다.

즉, $\overline{z}=\omega$, $\overline{\omega}=z$

$z=\overline{\omega}=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\overline{z}=\omega=a-bi$

ㄱ. $\overline{z-\omega}=\overline{z}-\overline{\omega}=-2bi$, $z+\omega=2a$이므로

$\overline{z-\omega}\neq z+\omega$

ㄴ. $\overline{z}-\omega=0$, $z-\overline{\omega}=0$이므로

$\overline{z}-\omega=z-\overline{\omega}$

ㄷ. $z\omega$는 실수이므로

$\overline{z\omega}=z\omega$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0346 복소수 $\frac{1}{z^2-1}$이 실수이므로

$\frac{1}{z^2-1}=\overline{\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}$, $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{\overline{z^2-1}}$

$z^2-1=\overline{z^2-1}$, $z^2-1=\overline{z}^2-1$

$z^2-\overline{z}^2=0$ $\quad\therefore (z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=0$ 답 ④

0347 $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}$

이때 $\alpha=5-3i$, $\beta=3-2i$이므로

$\alpha-\beta=(5-3i)-(3-2i)=2-i$

$\overline{\alpha-\beta}=2+i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(2-i)(2+i)=5$ 답 **5**

0348 $\overline{z_1}+2\overline{z_2}=\overline{z_1+2z_2}=2+5i$이므로

$z_1+2z_2=\overline{2+5i}=2-5i$

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=3-4i$이므로

$z_1z_2=\overline{3-4i}=3+4i$

$\therefore (z_1-1)(2z_2-1)=2z_1z_2-(z_1+2z_2)+1$

$=2(3+4i)-(2-5i)+1$

$=6+8i-2+5i+1$

$=5+13i$ 답 $\boldsymbol{5+13i}$

0349 $\overline{\alpha}+\beta=i$이므로 $\alpha+\overline{\beta}=\overline{\overline{\alpha}+\beta}=\overline{i}=-i$

$\overline{\alpha}\beta=-1$이므로 $\alpha\overline{\beta}=\overline{(\overline{\alpha}\beta)}=\overline{(-1)}=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{\overline{\beta}+\alpha}{\alpha\overline{\beta}}=\frac{-i}{-1}=i$ 답 ④

0350 $z\overline{z}=2$에서 $z=\frac{2}{\overline{z}}$ $\quad\therefore \frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{2}$

$\omega\overline{\omega}=2$에서 $\omega=\frac{2}{\overline{\omega}}$ $\quad\therefore \frac{1}{\omega}=\frac{\overline{\omega}}{2}$

$\therefore \frac{1}{z}+\frac{1}{\omega}=\frac{\overline{z}}{2}+\frac{\overline{\omega}}{2}=\frac{\overline{z}+\overline{\omega}}{2}=\frac{\overline{z+\omega}}{2}$

$=\frac{\overline{2i}}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$ 답 $\boldsymbol{-i}$

시험에 꼭 나오는 문제

본문 52~53쪽

0351 ① $(2-3i)+(5+4i)=7+i$

② $-3i-(-2+5i)=-3i+2-5i=2-8i$

③ $(1+i^2)(1-i^2)=(1-1)(1+1)=0$

④ $(5-i)^2=25-10i-1=24-10i$

⑤ $\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2i-1}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0352 $f(1, 4)+f(2, 8)+f(3, 12)+\cdots+f(17, 68)$

$=\frac{1-4i}{1+4i}+\frac{2-8i}{2+8i}+\frac{3-12i}{3+12i}+\cdots+\frac{17-68i}{17+68i}$

$=\frac{1-4i}{1+4i}+\frac{1-4i}{1+4i}+\frac{1-4i}{1+4i}+\cdots+\frac{1-4i}{1+4i}$

$=17\times\frac{1-4i}{1+4i}=17\times\frac{(1-4i)^2}{(1+4i)(1-4i)}$

$=17\times\frac{-15-8i}{17}=-15-8i$ 답 $\boldsymbol{-15-8i}$

0353 $x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{4}{4}=1$

$\therefore x^3-2x^2y-2xy^2+y^3=x^3+y^3-2xy(x+y)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy(x+y)$

$=(x+y)^3-5xy(x+y)$

$=1^3-5\times1\times1=-4$ 답 $\boldsymbol{-4}$

0354 $z=(1+i)a^2-(5+4i)a+6+3i$

$=(a^2-5a+6)+(a^2-4a+3)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$a^2-5a+6=0$, $a^2-4a+3\neq0$

(i) $a^2-5a+6=0$에서 $(a-2)(a-3)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$

(ii) $a^2-4a+3\neq0$에서 $(a-1)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq1,\ a\neq3$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 **2**

0355 $(4+i)x+\dfrac{10y}{1-2i}=(4+i)x+\dfrac{10y(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=(4+i)x+2y(1+2i)$

$=(4x+2y)+(x+4y)i$

즉, $(4x+2y)+(x+4y)i=8+9i$ 이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x+2y=8,\ x+4y=9$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

$\therefore x^2+y^2=5$ 답 ⑤

0356 $z=\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{a-i}{1-i}$

$=\dfrac{(3+i)(1-i)+(a-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{4-2i+a+ai-i+1}{2}$

$=\dfrac{a+5}{2}+\dfrac{a-3}{2}i$

$\overline{z}=\dfrac{a+5}{2}-\dfrac{a-3}{2}i$

$z=\overline{z}$이므로 $\dfrac{a-3}{2}=-\dfrac{a-3}{2}$

$a-3=0\qquad\therefore a=3$ 답 ③

다른풀이 $z=\overline{z}$이므로 z는 실수이다.

즉, $z=\dfrac{a+5}{2}+\dfrac{a-3}{2}i$에서

$\dfrac{a-3}{2}=0\qquad\therefore a=3$

0357 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$(1+i)z+2i\overline{z}=-1+3i$에서

$(1+i)(a+bi)+2i(a-bi)=-1+3i$

$a+bi+ai-b+2ai+2b=-1+3i$

$(a+b)+(3a+b)i=-1+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-1,\ 3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$이므로

$z=2-3i$

$\therefore z\overline{z}=(2-3i)(2+3i)=13$ 답 **13**

0358 $\dfrac{4-3i}{3+4i}=\dfrac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{-25i}{25}=-i$이므로

$f(n)=(-i)^n$

$f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)=-i-2+3i+4=2+2i$

$5f(5)+6f(6)+7f(7)+8f(8)=-5i-6+7i+8=2+2i$

$\vdots$

$97f(97)+98f(98)+99f(99)+100f(100)$

$=-97i-98+99i+100=2+2i$

$\therefore f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)+\cdots+100f(100)$

$=25(2+2i)=50+50i$

따라서 $a=50,\ b=50$이므로

$a-b=0$ 답 ①

0359 $b<a<0$이므로

$a-b>0,\ b-a<0,\ -a>0,\ -b>0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}}$

$=-\sqrt{\dfrac{a-b}{b-a}}+\sqrt{\dfrac{a}{-a}}+\left(-\sqrt{\dfrac{-b}{b}}\right)$

$=-\sqrt{\dfrac{a-b}{-(a-b)}}+\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$

$=-\sqrt{-1}$

$=-i$ 답 ④

0360 ㄱ. $\overline{z-\omega}=\overline{z}-\overline{\omega}$

ㄴ. $z=i$이면 $z^2=-1$로 실수이지만

$(z-1)^2=(i-1)^2=-2i$이므로 허수이다.

ㄷ. $z=\overline{\omega}$이면 $\overline{z}=\overline{(\overline{\omega})}=\omega$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\omega=z+\overline{z}=a+bi+a-bi=2a$,

$z\omega=z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉, $z+\omega$, $z\omega$는 모두 실수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0361 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}$

이때 $\alpha=1+i,\ \beta=-2+3i$이므로

$\alpha+\beta=(1+i)+(-2+3i)=-1+4i$

$\overline{\alpha+\beta}=-1-4i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-1+4i)(-1-4i)=17$ 답 ④

0362 $z=(1+i)x+(1-i)y-2+6i$

$=(x+y-2)+(x-y+6)i$

$\overline{z}=(x+y-2)-(x-y+6)i$ ······ ㉮

$z\overline{z}=0$에서

$\{(x+y-2)+(x-y+6)i\}\{(x+y-2)-(x-y+6)i\}=0$

$(x+y-2)^2+(x-y+6)^2=0$

이때 x, y는 실수이므로

$x+y-2=0$, $x-y+6=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=4$

………… ㉯

$\therefore x^2+y^2=(-2)^2+4^2=20$

………… ㉰

답 **20**

단계	채점요소	배점
㉮	z를 간단히 하고 $\overline{z}$ 구하기	30%
㉯	x, y의 값 구하기	50%
㉰	x^2+y^2의 값 구하기	20%

0363 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{d}{c}}$이므로 $c<0$, $d>0$

………… ㉮

따라서 $b+c<0$, $a-d<0$이므로

………… ㉯

$\sqrt{a^2}-|b|-\sqrt{c^2}+\sqrt{(b+c)^2}-|a-d|$

$=|a|-|b|-|c|+|b+c|-|a-d|$

$=-a-(-b)-(-c)-(b+c)-\{-(a-d)\}$

$=-a+b+c-b-c+a-d$

$=-d$

………… ㉰

답 $-d$

단계	채점요소	배점
㉮	a, b, c, d의 부호 정하기	30%
㉯	$b+c$, $a-d$의 부호 정하기	30%
㉰	식 간단히 하기	40%

0364 주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.

(i) 2가 3번, $2i$가 2번 나오는 경우

$2^3\times(2i)^2=8\times(-4)=-32 \qquad \therefore n=5$

(ii) 2가 3번, $2i$가 1번, $1+i$가 2번 나오는 경우

$2^3\times2i\times(1+i)^2=8\times2i\times2i=-32 \qquad \therefore n=6$

(iii) 2가 3번, $1+i$가 4번 나오는 경우

$2^3\times(1+i)^4=8\times(-4)=-32 \qquad \therefore n=7$

(i), (ii), (iii)에서 가능한 모든 n의 값의 합은

$5+6+7=18$

답 **18**

0365 $z_1=1+2i$이므로

$z_2=\overline{z_1}+(1+i)=(1-2i)+(1+i)=2-i$

$z_3=\overline{z_2}+(1+i)=(2+i)+(1+i)=3+2i$

$z_4=\overline{z_3}+(1+i)=(3-2i)+(1+i)=4-i$

$z_5=\overline{z_4}+(1+i)=(4+i)+(1+i)=5+2i$

$\vdots$

따라서 z_n의 실수부분은 n이고 허수부분은 n이 홀수이면 2, n이 짝수이면 -1이다.

$\therefore z_{100}=100-i$

답 $\boldsymbol{100-i}$

05 이차방정식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 55쪽

0366 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ 　　답 $x=1$ 또는 $x=4$

0367 $10x^2-x-3=0$에서 $(2x+1)(5x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$ 　　답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

0368 $x^2+3x+1=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 　　답 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

0369 $x^2-8x+28=0$에서

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times28}}{1}$

$=4\pm\sqrt{-12}=4\pm2\sqrt{3}i$ 　　답 $x=4\pm2\sqrt{3}i$

0370 $2x^2-7x-4=0$에서 $(2x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$ (실근) 　　답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$, 실근

0371 $4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ (실근) 　　답 $x=\frac{3}{2}$, 실근

0372 $x^2+2x+3=0$에서

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-3}}{1}=-1\pm\sqrt{2}i$ (허근)

답 $x=-1\pm\sqrt{2}i$, 허근

0373 보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=(-5)^2-4\times1\times2=17>0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-4)^2-4\times4=0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

ㅁ. $D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$

ㅂ. $\frac{D}{4}=3^2-1\times4=5>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄱ, ㅂ

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지면 $D=0$이므로 ㄷ, ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄴ, ㅁ

답 (1) ㄱ, ㅂ 　(2) ㄷ, ㄹ 　(3) ㄴ, ㅁ

0374 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times k=9-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-4k>0$ 　　$\therefore k<\frac{9}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=9-4k=0$ 　　$\therefore k=\frac{9}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=9-4k<0$ 　　$\therefore k>\frac{9}{4}$

답 (1) $k<\frac{9}{4}$ 　(2) $k=\frac{9}{4}$ 　(3) $k>\frac{9}{4}$

0375 이차방정식 $x^2+2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-2$

(2) $\alpha\beta=-2$

(3) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)\times(-2)=4$

(4) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-2)^2-2\times(-2)}{-2}=-4$

답 (1) -2 　(2) -2 　(3) 4 　(4) -4

0376 $x^2-(-1+2)x+(-1)\times2=0$

$\therefore x^2-x-2=0$ 　　답 $x^2-x-2=0$

0377 $x^2-\{(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})\}x$

$+(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-6x+1=0$ 　　답 $x^2-6x+1=0$

0378 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$ 　　답 $x^2-4x+5=0$

0379 $x^2+2x-4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2+2x-4=\{x-(-1+\sqrt{5})\}\{x-(-1-\sqrt{5})\}$

$=(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

답 $(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

0380 $x^2+25=0$에서 $x^2=-25$

$x=\pm\sqrt{-25}=\pm5i$

$\therefore x^2+25=(x-5i)(x+5i)$ 　　답 $(x-5i)(x+5i)$

0381 $2x^2-3x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times2}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

답 $\mathbf{2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)}$

0382 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$, $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$
$\therefore a=-4$, $b=1$ 답 $\mathbf{a=-4, b=1}$

0383 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+2i)+(3-2i)=-a$, $(3+2i)(3-2i)=b$
$\therefore a=-6$, $b=13$ 답 $\mathbf{a=-6, b=13}$

유형 익/히/기

본문 56~62쪽

0384 $(x-5)(x+3)=-x(x+1)$에서
$x^2-2x-15=-x^2-x$, $2x^2-x-15=0$
$(2x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=3$ 답 ②

0385 근의 공식을 이용하여 해를 구하면
$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times3\times5}}{2\times3}=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$
따라서 $a=7$, $b=11$이므로 $a+b=18$ 답 **18**

0386 $(x◎x)-(x◎1)=4$에서
$x^2-x-x-(x-x-1)=4$
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은
$-1+3=2$ 답 ④

0387 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$x^2-(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}+1)\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=\sqrt{2}+1$, $\beta=\sqrt{2}$
$\therefore \alpha-\beta=1$ 답 **1**

0388 이차방정식 $x^2-ax+2\sqrt{3}=0$의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로
$(1+\sqrt{3})^2-a(1+\sqrt{3})+2\sqrt{3}=0$
$1+2\sqrt{3}+3-a(1+\sqrt{3})+2\sqrt{3}=0$
$a(1+\sqrt{3})=4+4\sqrt{3}$
$\therefore a=\frac{4+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=4$ 답 ④

0389 이차방정식 $x^2+(k+2)x-2k=0$의 한 근이 1이므로
$1+k+2-2k=0$ $\therefore k=3$
㉮
$k=3$을 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+5x-6=0$, $(x+6)(x-1)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$
따라서 다른 한 근은 -6이므로 $\alpha=-6$
㉯
$\therefore k+\alpha=-3$
㉰
답 $\mathbf{-3}$

단계	채점요소	배점
㉮	k의 값 구하기	40 %
㉯	α의 값 구하기	40 %
㉰	$k+\alpha$의 값 구하기	20 %

0390 $x=1$이 이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$의 근이므로
$k+a+(k+1)b=0$
$(1+b)k+a+b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$1+b=0$, $a+b=0$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$a-b=2$ 답 **2**

0391 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 한 근이 α이므로
$\alpha^2-2\alpha-1=0$
이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면
$\alpha-2-\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=2$
$\therefore \alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^3+3\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$
$=2^3+3\times2$
$=14$ 답 **14**

0392 $x^2-|x-2|-4=0$에서
(i) $x<2$일 때, $x^2+(x-2)-4=0$
$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
그런데 $x<2$이므로 $x=-3$

(ii) $x \geq 2$일 때, $x^2-(x-2)-4=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x \geq 2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은 $(-3)+2=-1$ 답 $\mathbf{-1}$

0393 $x^2-2|x|-2=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+2x-2=0$ $\quad\therefore$ $x=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{3}$

(ii) $x \geq 0$일 때, $x^2-2x-2=0$ $\quad\therefore$ $x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

답 $\boldsymbol{x=-1-\sqrt{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=1+\sqrt{3}}$

0394 $|2 \circledcirc x|=|2x+2+x|=|3x+2|$이므로

$|3x+2|=x^2-2$

(i) $x<-\dfrac{2}{3}$일 때, $-(3x+2)=x^2-2$

$x^2+3x=0$, $x(x+3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<-\dfrac{2}{3}$이므로 $x=-3$

(ii) $x \geq -\dfrac{2}{3}$일 때, $3x+2=x^2-2$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x \geq -\dfrac{2}{3}$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은 $(-3)\times 4=-12$ 답 ①

0395 $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로

$x^2-|x|-2=|x-1|$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2=-(x-1)$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ii) $0 \leq x<1$일 때, $x^2-x-2=-(x-1)$

$x^2-3=0$ $\quad\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $0 \leq x<1$이므로 해는 없다.

(iii) $x \geq 1$일 때, $x^2-x-2=x-1$

$x^2-2x-1=0$ $\quad\therefore$ $x=1\pm\sqrt{2}$

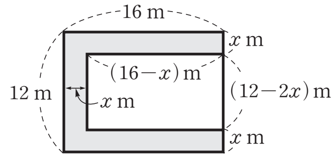
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=1+\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

따라서 모든 근의 합은

$-3+(1+\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}$ 답 $\boldsymbol{-2+\sqrt{2}}$

0396 잔디가 깔리지 않는 땅의 넓이가 78 m^2이므로



$(16-x)(12-2x)=78$

$2x^2-44x+114=0$

$x^2-22x+57=0$

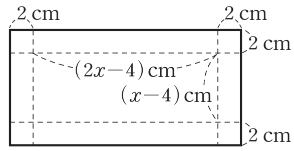
$(x-3)(x-19)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=19$

그런데 $x>0$, $12-2x>0$에서 $0<x<6$이므로

$x=3$ 답 **3**

0397 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이므로 직육면체 모양의 상자의 부피는



$2(2x-4)(x-4)\text{ cm}^3$

이 상자의 부피가 192 cm^3이므로

$2(2x-4)(x-4)=192$, $2x^2-12x+16=96$

$x^2-6x-40=0$, $(x+4)(x-10)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=10$

그런데 $2x-4>0$, $x-4>0$에서 $x>4$이므로

$x=10$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 20 cm, 세로의 길이는 10 cm이다. 답 **가로: 20 cm, 세로: 10 cm**

0398 처음 물건의 가격을 a라 하면

x % 인상한 가격은 $a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$

다시 이 가격을 x % 인하한 가격은

$a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 처음 물건의 가격 a보다 9 % 낮으므로

$a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{x}{100}\right)=a\left(1-\dfrac{9}{100}\right)$

$1-\dfrac{x^2}{100^2}=1-\dfrac{9}{100}$

$x^2=900$ $\quad\therefore$ $x=30$ ($\because$ $x>0$) 답 ③

0399 이차방정식 $x^2-5x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+2)>0$

$17-4k>0$ $\quad\therefore$ $k<\dfrac{17}{4}$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 4이다. 답 ②

0400 이차방정식 $(m^2+4)x^2+2(m+2)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(m+2)^2-2(m^2+4)\geq 0$

$-m^2+4m-4 \geq 0$, $(m-2)^2 \leq 0$ $\quad\therefore$ $m=2$ 답 ⑤

0401 이차방정식 $(x-1)^2-k(2x-1)+12=0$, 즉
$x^2-2(k+1)x+k+13=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+13)=0$
$k^2+k-12=0$, $(k+4)(k-3)=0$
$\therefore k=-4$ 또는 $k=3$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-4+3=-1$ 답 -1

0402 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+(k^2-6k+b)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2-6k+b)=0$
$k^2-2ak+a^2-k^2+6k-b=0$
$(6-2a)k+a^2-b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$6-2a=0$, $a^2-b=0$
따라서 $a=3$, $b=9$이므로
$a+b=12$ 답 12

0403 이차방정식 $x^2+ax+3-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=a^2-4(3-a)=0$
$a^2+4a-12=0$, $(a+6)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)
$a=2$를 $2x^2-ax+a+1=0$에 대입하면
$2x^2-2x+3=0$ ······ ㉠
㉠의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2\times3=-5<0$
따라서 ㉠은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 ③

0404 이차방정식 $x^2+6x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=3^2-(-a)<0 \quad \therefore a<-9$
······ ㉮
이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=3^2-4\{-(a+1)\}=4a+13$
이때 $a<-9$이므로
$D_2=4a+13<-23<0$
······ ㉯
따라서 이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
······ ㉰
답 서로 다른 두 허근

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값의 범위 구하기	30 %
㉯	이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$의 판별식의 부호 알기	50 %
㉰	근을 판별하기	20 %

0405 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로
$a<0$, $b<0$
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b$
이때 $a<0$, $b<0$이므로 $a^2>0$, $-4b>0$
$\therefore D=a^2-4b>0$
따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0406 $(k+1)x^2+(2k+3)x+k+3$이 x에 대한 이차식이므로 $k\neq-1$
또, 이 식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$(k+1)x^2+(2k+3)x+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(2k+3)^2-4(k+1)(k+3)=0$
$-4k-3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{4}$ 답 ①

0407 $ax^2+2(k-1)x+k^2+a-bk$가 x에 대한 이차식이므로 $a\neq0$
또, 이 식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식
$ax^2+2(k-1)x+k^2+a-bk=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-a(k^2+a-bk)=0$
$\therefore (1-a)k^2+(ab-2)k+1-a^2=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$1-a=0$, $ab-2=0$, $1-a^2=0$
$\therefore a=1$, $b=2$
$\therefore a+b=3$ 답 3

0408 주어진 이차식이 $(x-n)^2$의 꼴로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 하므로 x에 대한 이차방정식
$x^2-mx+2m+5=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(-m)^2-4(2m+5)=0$
$m^2-8m-20=0$, $(m+2)(m-10)=0$
$\therefore m=10$ ($\because m>0$)
따라서 주어진 이차식은 $x^2-10x+25$이고 이것은 $(x-5)^2$으로 인수분해되므로 $n=5$
$\therefore m+n=15$ 답 15

0409 $(a-c)x^2+2bx+a+c$가 x에 대한 이차식이므로
$a-c\neq0 \quad \therefore a\neq c$
또, 이 식이 완전제곱식이므로 x에 대한 이차방정식
$(a-c)x^2+2bx+a+c=0$의 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$
$b^2-a^2+c^2=0 \quad \therefore b^2+c^2=a^2$
따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.
답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

0410 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$\therefore \dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{3^3-3\times1\times3}{1}=18$

답 18

0411 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ (①), $\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$ (②)

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times\dfrac{1}{4}=3$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{3}$

④ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{2}$

⑤ $\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\beta}=\dfrac{1+\beta+1+\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2+2}{1+2+\frac{1}{4}}=\dfrac{16}{13}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0412 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ …… ㉠

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0,\ \beta>0$)

$=4+2=6$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}$

답 $\sqrt{6}$

0413 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-2)^2-2\times\frac{3}{2}}{(-2)^2-4\times\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

0414 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-2\alpha-4=0$에서 $\alpha^2-3\alpha+1=-\alpha+5$

$\beta^2-2\beta-4=0$에서 $\beta^2-3\beta+1=-\beta+5$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$

$\therefore (\alpha^2-3\alpha+1)(\beta^2-3\beta+1)=(-\alpha+5)(-\beta+5)$

$=\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25$

$=-4-5\times2+25$

$=11$

답 ③

0415 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-7\alpha+5=0$에서 $\alpha^2=7\alpha-5$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=7$

$\therefore \alpha^2+7\beta=(7\alpha-5)+7\beta=7(\alpha+\beta)-5$

$=7\times7-5=44$

답 44

0416 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0,\ \beta^2-5\beta+2=0$

$\therefore \alpha^2-4\alpha+2=\alpha,\ \beta^2-4\beta+2=\beta$

…… ㉮

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$

…… ㉯

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-4\beta+2}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{5^2-2\times2}{2}=\dfrac{21}{2}$

…… ㉰

답 $\dfrac{21}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	분모를 간단히 나타내기	30 %
㉯	근과 계수의 관계 이용하기	30 %
㉰	식의 값 구하기	40 %

0417 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+1,\ \alpha\beta=k-1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5$에서

$(k+1)^2-4(k-1)=5$

$k^2-2k=0,\ k(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

답 2

0418 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-1,\ \alpha\beta=k$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha+\alpha\beta^2+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)$

$=(2k-1)(k+1)$

$=2k^2+k-1$

$\alpha^2\beta+\alpha+\alpha\beta^2+\beta=9$에서

$2k^2+k-1=9,\ 2k^2+k-10=0$

$(2k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k$는 정수)

답 ②

0419 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=k$

$|\alpha|+|\beta|=7$의 양변을 제곱하면
$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=49$, $\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=49$
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=49$, $(-3)^2-2k+2|k|=49$
$\therefore |k|-k=20$
(i) $k<0$이면 $-k-k=20$ $\quad\therefore k=-10$
(ii) $k\ge0$이면 $0=20$이므로 k의 값은 없다.
(i), (ii)에서 $k=-10$ 답 -10

0420 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$2\alpha+3\alpha=k+1$ $\quad\therefore k=5\alpha-1$ …… ㉠
$2\alpha\times3\alpha=k$ $\quad\therefore k=6\alpha^2$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$5\alpha-1=6\alpha^2$, $6\alpha^2-5\alpha+1=0$
$(2\alpha-1)(3\alpha-1)=0$
$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$k=\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{2}{3}$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$ 답 1

0421 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+2)=-2$ $\quad\therefore \alpha=-2$
$\alpha(\alpha+2)=m^2-2m$ …… ㉠
$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면
$m^2-2m=0$, $m(m-2)=0$
$\therefore m=0$ 또는 $m=2$
따라서 모든 실수 m의 값의 합은 $0+2=2$ 답 ⑤

0422 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 자연수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+1)=m$ $\quad\therefore m=2\alpha+1$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+1)=m+1$ $\quad\therefore \alpha^2+\alpha=m+1$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\alpha^2+\alpha=(2\alpha+1)+1$, $\alpha^2-\alpha-2=0$
$(\alpha-2)(\alpha+1)=0$ $\quad\therefore \alpha=2$ ($\because$ α는 자연수)
$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면
$m=5$ 답 5

0423 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로
$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{m^2+m-6}{3}=0$ …… ㉠
$\alpha\beta=\frac{-m+1}{3}<0$ …… ㉡
㉠에서 $m^2+m-6=0$, $(m+3)(m-2)=0$
$\therefore m=-3$ 또는 $m=2$
㉡에서 $m>1$
따라서 구하는 m의 값은 2이다. 답 2

0424 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$
$\therefore (\alpha+\beta)+2=-b$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$-a+2=-b$, $b-a+1=a$
$\therefore a-b=2$, $2a-b=1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$
$\therefore ab=3$ 답 3

0425 이차방정식 $x^2-ax+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=5$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+bx+15=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=15$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a+5=-b$, $a\times5=15$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-8$
$\therefore a+b=-5$ 답 ②

0426 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha-\frac{1}{\alpha}$, $\beta-\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=-a$, $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=b$
$\therefore \alpha+\beta-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$
$$\alpha\beta-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-3-\frac{-3}{1}=-a \qquad \therefore a=0$

$1+\frac{1}{1}-\frac{(-3)^2-2\times1}{1}=b \qquad \therefore b=-5$

$\therefore a-b=5$ 답 ④

0427 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

이때

$(3-\alpha)+(3-\beta)=6-(\alpha+\beta)=6-5=1$

$(3-\alpha)(3-\beta)=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=9-3\times5+3=-3$

이므로 $3-\alpha$, $3-\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-x-3=0$ 답 ③

0428 이차방정식 $2x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

이때

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=-\frac{3}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-\frac{9}{2}$

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2$

$=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}$

이므로 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^2+9x+9=0$

따라서 $a=9$, $b=9$이므로

$a+b=18$ 답 **18**

0429 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

······································ ㉮

이때

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times(-1)=6$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

······································ ㉯

이므로 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

······································ ㉰

$\therefore a=-6,\ b=1$

······································ ㉱

답 $\boldsymbol{a=-6,\ b=1}$

단계	채점요소	배점
㉮	근과 계수의 관계 이용하기	20%
㉯	α^2, β^2의 합과 곱 구하기	50%
㉰	이차방정식 구하기	20%
㉱	a, b의 값 구하기	10%

0430 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-a$, $2\alpha=b \qquad \therefore a=-2-\alpha$, $b=2\alpha$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-(a+1)x+b-1=0$의 두 근이 1, β이므로

$1+\beta=a+1$, $\beta=b-1 \qquad \therefore a=\beta$, $b=\beta+1$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-2-\alpha=\beta$, $2\alpha=\beta+1$

$\therefore \alpha+\beta=-2$, $2\alpha-\beta=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{5}{3}$

이때 $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-2$, $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{9}$이므로

α, β, 즉 $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$9\left(x^2+2x+\frac{5}{9}\right)=0 \qquad \therefore 9x^2+18x+5=0$

따라서 $p=18$, $q=5$이므로

$p-q=13$ 답 **13**

0431 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 한 근이 $3+\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-a$, $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=2b$

따라서 $a=-6$, $b=2$이므로 $a-b=-8$ 답 ①

0432 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1-i$이면 다른 한 근은 $-1+i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-i)+(-1+i)=-m$, $(-1-i)(-1+i)=n$이므로

$m=2$, $n=2$

이때 $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\times2=1$이므로 $\frac{1}{m}$, n, 즉 $\frac{1}{2}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)=0 \qquad \therefore 2x^2-5x+2=0$

답 $\boldsymbol{2x^2-5x+2=0}$

0433 $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$이면 다른 한 근은 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$이다.

······ ㉮

근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-a$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=b$

이므로 $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=x^2-x+\frac{1}{2}$

······ ㉯

따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=2^2-2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

······ ㉰

답 $\frac{5}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	다른 한 근 구하기	30 %
㉯	$f(x)$ 구하기	40 %
㉰	$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

유형 up

본문 63쪽

0434 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(y-1)x-6y^2+7y-k$

x에 대한 이차방정식 $x^2+(y-1)x-6y^2+7y-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y-1)^2-4(-6y^2+7y-k)=25y^2-30y+4k+1$

이 완전제곱식이어야 한다.

즉, y에 대한 이차방정식 $25y^2-30y+4k+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-15)^2-25(4k+1)=0$

$225-100k-25=0$, $100k=200$

$\therefore k=2$

답 2

0435 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-(3y+3)x+ay^2+y+1$

x에 대한 이차방정식 $2x^2-(3y+3)x+ay^2+y+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3y+3)\}^2-4\times 2\times(ay^2+y+1)$

$=(9-8a)y^2+10y+1$

이 완전제곱식이어야 한다.

즉, $a\neq\frac{9}{8}$이고, y에 대한 이차방정식 $(9-8a)y^2+10y+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=5^2-(9-8a)=0$

$25-9+8a=0$, $8a=-16$

$\therefore a=-2$

답 -2

0436 소라는 x^2의 계수와 상수항을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=(-3)\times 4=-12$

$\therefore c=-12a$

민혁이는 x^2의 계수와 x의 계수를 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-4$

$\therefore b=4a$

따라서 주어진 이차방정식은

$ax^2+4ax-12a=0$, $x^2+4x-12=0$ ($\because a\neq 0$)

$(x+6)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

답 $x=-6$ 또는 $x=2$

0437 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -6, 1이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-\frac{b}{a}=-5$

$\therefore b=5a$

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{c}{4a}=-6$

$\therefore c=-24a$

따라서 주어진 이차방정식은

$ax^2+5ax-24a=0$, $x^2+5x-24=0$ ($\because a\neq 0$)

$(x+8)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-8$ 또는 $x=3$

답 $x=-8$ 또는 $x=3$

0438 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=5$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x+1)=0$이려면

$3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha-1}{3}+\frac{\beta-1}{3}=\frac{\alpha+\beta-2}{3}=\frac{5-2}{3}=1$

답 1

0439 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=16$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x)=0$이려면

$4x=\alpha$ 또는 $4x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{4}\times\frac{\beta}{4}=\frac{\alpha\beta}{16}=\frac{16}{16}=1$ 답 ①

0440 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(2x+5)=0$이려면 $2x+5=\alpha$ 또는 $2x+5=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-5}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+5)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha-5}{2}\times\frac{\beta-5}{2}=\frac{\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25}{4}$

$=\frac{-4-15+25}{4}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

시험에 꼭 나오는 문제

본문 64~67쪽

0441 $2x^2-3=(x+1)(x-5)$에서

$2x^2-3=x^2-4x-5$, $x^2+4x+2=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times2}=-2\pm\sqrt{2}$ 답 ③

0442 $x^2-(a+2)x+2a=0$에 $x=3$을 대입하면

$9-3(a+2)+2a=0$ $\qquad\therefore a=3$

$a=3$을 이차방정식 $x^2+ax-a^2-1=0$에 대입하면

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ 답 $x=-5$ 또는 $x=2$

0443 $|x^2+(a+2)x+a^2|=1$에 $x=-2$를 대입하면

$|(-2)^2+(a+2)\times(-2)+a^2|=1$

$|a^2-2a|=1$ $\qquad\therefore a^2-2a=\pm1$

(i) $a^2-2a=1$일 때,

$a^2-2a-1=0$ $\qquad\therefore a=1\pm\sqrt{2}$

(ii) $a^2-2a=-1$일 때,

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\qquad\therefore a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})\times1=-1$ 답 -1

0444 (i) $x<1$일 때, $x^2-3(x-1)-7=0$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x<1$이므로 $x=-1$

(ii) $x\ge1$일 때, $x^2+3(x-1)-7=0$

$x^2+3x-10=0$, $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 주어진 방정식의 모든 근의 합은 1이다. 답 ②

0445 처음 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 도로를 제외한 나머지 땅의 넓이는 $(x-12)(x-20)(\text{m}^2)$

도로의 넓이는 $x^2-(x-12)(x-20)(\text{m}^2)$

도로의 넓이가 처음 땅의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$x^2-(x-12)(x-20)=\frac{1}{4}x^2$, $x^2-128x+960=0$

$(x-8)(x-120)=0$ $\qquad\therefore x=8$ 또는 $x=120$

그런데 $x>20$이므로 $x=120$

따라서 처음 땅의 한 변의 길이는 120 m이다. 답 **120 m**

0446 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2+k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+k-6)<0$

$-5k+10<0$ $\qquad\therefore k>2$

따라서 가장 작은 자연수 k의 값은 3이다. 답 ①

0447 이차방정식 $x^2+(am+b)x+m^2+c+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(am+b)^2-4(m^2+c+2)=0$

$a^2m^2+2abm+b^2-4m^2-4c-8=0$

$(a^2-4)m^2+2abm+b^2-4c-8=0$

이 등식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$a^2-4=0$, $2ab=0$, $b^2-4c-8=0$

따라서 $a^2=4$, $b=0$, $c=-2$이므로

$a^2+b^2+c^2=4+0+4=8$ 답 8

0448 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}}=-\sqrt{\frac{a}{a-2}}$이므로 $a>0$, $a-2<0$

$\therefore 0<a<2$

이때 a는 정수이므로 $a=1$

ㄱ. $x^2+ax+a=0$, 즉 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $2x^2+(a-1)x+2a=0$, 즉 $2x^2+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=0-4\times2\times2=-16<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $x^2-ax+a-4=0$, 즉 $x^2-x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(-3)=13>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

0449 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca$

$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$

이 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0450 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}&=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}\\&=\frac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times(-2)-\frac{3}{2}}{-2-\frac{3}{2}+1}\\&=\frac{\frac{19}{4}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{19}{10}\end{aligned}$$

답 ③

0451 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0$에서 $\alpha^2-4\alpha+2=\alpha$

$\beta^2-5\beta+2=0$에서 $\beta^2-4\beta+2=\beta$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=2$이므로

$(\alpha^2-4\alpha+2)(\beta^2-4\beta+2)=\alpha\beta=2$ **답 2**

0452 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k$ …… ㉠

$|\alpha-\beta|=4$에서 $(\alpha-\beta)^2=16$이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^2-4k=16$ $\quad\therefore k=-3$ **답 ③**

0453 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-(k+1)$ $\quad\therefore k=-3\alpha-1$ …… ㉠

$\alpha\times2\alpha=2$에서 $\alpha^2=1$ $\quad\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=2$ 또는 $k=-4$

그런데 k는 자연수이므로 $k=2$ **답 2**

0454 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1$ $\quad\therefore \alpha=k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k^2+2k+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=k^2+2k+3$

$\therefore k=-3$ **답 −3**

0455 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-2$

이때

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-4}{-2}=2$

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=-\dfrac{1}{2}$

이므로 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-2x-\dfrac{1}{2}\right)=0$ $\quad\therefore 2x^2-4x-1=0$ **답 ③**

0456 이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2+x+1=0$, 즉 $x^2+2x+2=0$의 근은

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times2}=-1\pm i$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2}x^2+x+1&=\frac{1}{2}\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}\\&=\frac{1}{2}(x+1-i)(x+1+i)\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{1}{2}x^2+x+1$의 인수인 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

0457 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4$, $b=1$

따라서 이차방정식 $x^2-bx+a=0$, 즉 $x^2-x-4=0$을 풀면

$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ 답 $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

0458 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y+2)x-2y^2-4y+a$

이때 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y+2)x-2y^2-4y+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(-2y^2-4y+a)=3y^2+8y+4-a$

가 완전제곱식이어야 한다.

따라서 y에 대한 이차방정식 $3y^2+8y+4-a=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=4^2-3(4-a)=0$

$4+3a=0$ $\therefore a=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

0459 이차방정식 $x^2+px+q=0$에서

A는 q의 값을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 곱)$=q=(-5)\times(-1)=5$

B는 p의 값을 바르게 보고 풀었으므로

(두 근의 합)$=-p=(3+2i)+(3-2i)=6$

$\therefore p=-6$

$\therefore p+q=-1$ 답 -1

0460 방정식 $f(x)=0$이 -1을 근으로 가지므로

$f(-1)=0$

이때 보기의 각 식의 좌변에 $x=2$를 대입하면

① $f(-x-1)=f(-3)$ ② $f(x+1)=f(3)$

③ $f(2x-1)=f(3)$ ④ $f(2x+2)=f(6)$

⑤ $f(x^2-5)=f(-1)$

따라서 2를 반드시 근으로 갖는 방정식은 ⑤이다. 답 ⑤

0461 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(3x-4)=0$이려면

$3x-4=\alpha$ 또는 $3x-4=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+4}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+4}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-4)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+4}{3}+\frac{\beta+4}{3}=\frac{\alpha+\beta+8}{3}=\frac{7+8}{3}=5$ 답 5

0462 $x=2$가 $x^2+(a+k)x+(k-1)b=0$의 근이므로

$4+2a+2k+kb-b=0$

$\therefore (2+b)k+4+2a-b=0$

······ ㉮

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2+b=0$, $4+2a-b=0$

따라서 $a=-3$, $b=-2$이므로

······ ㉯

$ab=6$

······ ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	$x=2$를 주어진 방정식에 대입하여 k에 대한 식으로 나타내기	30%
㉯	a, b의 값 구하기	50%
㉰	ab의 값 구하기	20%

0463 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱이 $-12<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 이차방정식의 두 근을 $-\alpha$, 3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha+3\alpha=-2(m+1)$ $\therefore m=-\alpha-1$ ······ ㉠

$(-\alpha)\times3\alpha=-12$에서 $\alpha^2=4$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$ ······ ㉡

······ ㉮

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha=-2$일 때 $m=1$

$\alpha=2$일 때 $m=-3$

······ ㉯

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 -3이다.

······ ㉰

답 -3

단계	채점요소	배점
㉮	α의 값 구하기	50%
㉯	m의 값 구하기	30%
㉰	모든 실수 m의 값의 곱 구하기	20%

0464 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, α이므로

$1+\alpha=-a$, $\alpha=b$

$\therefore a=-\alpha-1$, $b=\alpha$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 -3, β이므로

$-3+\beta=-b$, $-3\beta=a$

$\therefore a=-3\beta$, $b=-\beta+3$ ······ ㉡

······ ㉮

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\alpha-1=-3\beta$, $\alpha=-\beta+3$

$\therefore \alpha-3\beta=-1$, $\alpha+\beta=3$

두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=1$

······ ㉯

따라서 α, β, 즉 2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(2+1)x+2\times1=0$

$\therefore x^2-3x+2=0$

㉰

답 $\boldsymbol{x^2-3x+2=0}$

단계	채점요소	배점
㉮	a, b를 α, β에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	α, β의 값 구하기	30 %
㉰	이차방정식 구하기	30 %

0465 $\dfrac{1}{1+2i}=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{1-2i}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$이면 다른 한 근은 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$이다.

㉮

근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\right)+\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i\right)=-\dfrac{a}{5} \qquad \therefore a=-2$

$\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\right)\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i\right)=\dfrac{b}{5} \qquad \therefore b=1$

㉯

$\therefore a+b=-1$

㉰

답 $\boldsymbol{-1}$

단계	채점요소	배점
㉮	다른 한 근 구하기	30 %
㉯	a, b의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	20 %

0466 이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=2$

ㄱ. 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8>0 \qquad \therefore a^2>8$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-4>4$

ㄴ. $\alpha\beta=2>0$이므로 두 근의 부호는 서로 같다.

$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

ㄷ. $\alpha>4$이면 $\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{4}$

이때 $\alpha\beta=2$이므로 $\beta=\dfrac{2}{\alpha}<\dfrac{1}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 **ㄱ, ㄴ, ㄷ**

0467 계수가 실수인 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\overline{\alpha}=a-bi$이고 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=p \qquad \therefore a=\dfrac{p}{2}$ …… ㉠

$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=p+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+b^2=p+3$

$\therefore b^2=-\dfrac{p^2}{4}+p+3$ …… ㉢

이때

$\alpha^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이므로 α^3이 실수가 되려면

$3a^2b-b^3=0$, $b(3a^2-b^2)=0$

이때 $b\neq0$이므로 $3a^2-b^2=0 \qquad \therefore b^2=3a^2$ …… ㉣

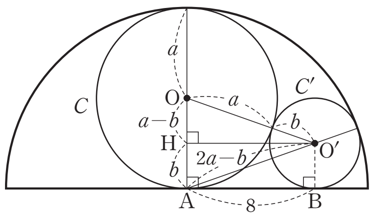
㉠, ㉢을 ㉣에 대입하면

$-\dfrac{p^2}{4}+p+3=3\times\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$

$\therefore p^2-p-3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다. 답 ②

0468



두 원 C, C'의 중심을 각각 O, O$'$이라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 a, 원 C'의 반지름의 길이를 b라 하자. 점 O$'$에서 $\overline{\text{OA}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 OHO$'$에서

$(a+b)^2=(a-b)^2+8^2 \qquad \therefore ab=16$ …… ㉠

직각삼각형 O$'$HA에서

$(2a-b)^2=b^2+8^2$, $a^2-ab=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=32 \qquad \therefore a=4\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$a=4\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $b=2\sqrt{2}$

이때 $a+b=6\sqrt{2}$, $ab=16$이므로 두 원 C, C'의 반지름의 길이, 즉 a, b를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6\sqrt{2}x+16=0$ 답 ③

06 이차방정식과 이차함수

교과서 문제 정/복/하/기

본문 69쪽

0469 $3x^2-6x=0$에서

$3x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 답 **0, 2**

0470 $-x^2+4x-3=0$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 답 **1, 3**

0471 이차방정식 $2x^2-7x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times2\times4=17>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

답 **2**

0472 이차방정식 $-x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(-1)=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.

답 **1**

0473 이차방정식 $x^2+3x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times5=-11<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 0개이다.

답 **0**

0474 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times k=4-k$

(1) $\frac{D}{4}=4-k>0$ $\quad\therefore k<4$

(2) $\frac{D}{4}=4-k=0$ $\quad\therefore k=4$

(3) $\frac{D}{4}=4-k<0$ $\quad\therefore k>4$

답 (1) $\boldsymbol{k<4}$ (2) $\boldsymbol{k=4}$ (3) $\boldsymbol{k>4}$

0475 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\times k=9-k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$9-k\geq0$ $\quad\therefore k\leq9$ 답 $\boldsymbol{k\leq9}$

0476 $x^2+2x+2=-2x-1$에서

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 답 **−3, −1**

0477 $-x^2+6x-9=2x-5$에서

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ 답 **2**

0478 이차방정식 $x^2-3x-2=x-7$, 즉 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 **만나지 않는다.**

0479 이차방정식 $x^2+2x-1=-3x+5$, 즉 $x^2+5x-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times(-6)=49>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

0480 이차방정식 $-x^2+4x+1=2x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.) 답 **한 점에서 만난다. (접한다.)**

0481 이차방정식 $x^2-4x+1=2x+k$, 즉 $x^2-6x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(1-k)=8+k$

(1) $\frac{D}{4}=8+k>0$ $\quad\therefore k>-8$

(2) $\frac{D}{4}=8+k=0$ $\quad\therefore k=-8$

(3) $\frac{D}{4}=8+k<0$ $\quad\therefore k<-8$

답 (1) $\boldsymbol{k>-8}$ (2) $\boldsymbol{k=-8}$ (3) $\boldsymbol{k<-8}$

0482 이차방정식 $-2x^2+x-1=4x+k$, 즉

$2x^2+3x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times2\times(k+1)=1-8k$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로 $1-8k\geq0$ $\quad\therefore k\leq\frac{1}{8}$ 답 $\boldsymbol{k\leq\frac{1}{8}}$

0483 $y=2x^2+2x=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

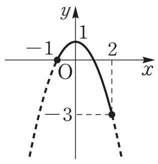
따라서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고, 최댓값은 없다.

답 **최댓값: 없다., 최솟값: $-\frac{1}{2}$**

0484 $y=-x^2+2x-7=-(x-1)^2-6$
따라서 $x=1$일 때 최댓값은 -6이고, 최솟값은 없다.

답 **최댓값: -6, 최솟값: 없다.**

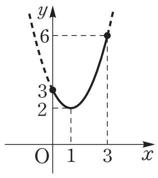
0485 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(2)=-3$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 **최댓값: 1, 최솟값: -3**

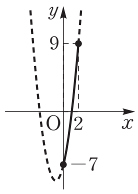
0486 $f(x)=x^2-2x+3$
$=(x-1)^2+2$
이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(3)=6$
따라서 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.

답 **최댓값: 6, 최솟값: 2**

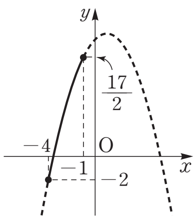
0487 $f(x)=2x^2+4x-7$
$=2(x+1)^2-9$
이므로 $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(0)=-7$, $f(2)=9$
따라서 최댓값은 9, 최솟값은 -7이다.

답 **최댓값: 9, 최솟값: -7**

0488 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+10$
$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{21}{2}$
이므로 $-4\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(-4)=-2$, $f(-1)=\frac{17}{2}$
따라서 최댓값은 $\frac{17}{2}$, 최솟값은 -2이다.

답 **최댓값: $\frac{17}{2}$, 최솟값: -2**

유형 익히기

본문 70~75쪽

0489 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 -3, 2는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{a}{2}=-3+2$에서 $a=2$
$\frac{b}{2}=(-3)\times 2$에서 $b=-12$
$\therefore a+b=-10$

답 ①

0490 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 2, 3은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$2+3=a$, $2\times 3=b$ $\quad\therefore a=5$, $b=6$
이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로
$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$
따라서 구하는 두 점 사이의 거리는
$5-1=4$

답 **4**

0491 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=a$ …… ㉠
이때 $\overline{AB}=8$이므로 $\alpha-\beta=8$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=64$
$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$36-4a=64$ $\quad\therefore a=-7$

답 ②

다른풀이 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근을 α, $\alpha+8$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+8)=6$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+8)=a$ …… ㉡
㉠에서 $2\alpha=-2$ $\quad\therefore \alpha=-1$
$\alpha=-1$을 ㉡에 대입하면
$(-1)\times(-1+8)=a$ $\quad\therefore a=-7$

0492 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-2k+4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식
$x^2-2kx+k^2-2k+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-2k+4)>0$
$2k-4>0$ $\quad\therefore k>2$
따라서 가장 작은 정수 k의 값은 3이다.

답 ④

0493 이차함수 $y=x^2+2ax-b^2+15$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+15)<0$

$\therefore a^2+b^2<15$

이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$

의 8개이다. 답 8

0494 이차함수 $y=\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\times\frac{1}{2}k\times\left(-k+\frac{3}{2}\right)=0$

$2k^2-3k+1=0$, $(2k-1)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$ …… ㉠

가

이차함수 $y=-x^2+3x+k-3$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+3x+k-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times(-1)\times(k-3)<0$

$-3+4k<0$ $\therefore k<\frac{3}{4}$ …… ㉡

나

㉠, ㉡에서 $k=\frac{1}{2}$

다

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점요소	배점
가	$\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}=0$의 판별식을 이용하여 k의 값의 조건 구하기	40%
나	$-x^2+3x+k-3=0$의 판별식을 이용하여 k의 값의 조건 구하기	40%
다	k의 값 구하기	20%

0495 이차함수 $y=x^2+2ax+ak+k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2ax+ak+k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(ak+k+b)=0$

$\therefore a^2-b-k(a+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-b=0$, $a+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=0$ 답 0

0496 이차함수 $y=3x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=2x-a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $3x^2-2x=2x-a$, 즉 $3x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3a>0$ $\therefore a<\frac{4}{3}$ 답 $a<\frac{4}{3}$

0497 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 접하므로 이차방정식 $2x^2=3x+k$, 즉 $2x^2-3x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times(-k)=0$

$9+8k=0$ $\therefore k=-\frac{9}{8}$ 답 $-\frac{9}{8}$

0498 이차함수 $y=x^2+2ax+a^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2=2x+1$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-1)\ge0$

$-2a+2\ge0$ $\therefore a\le1$

따라서 가장 큰 실수 a의 값은 1이다. 답 1

0499 이차함수 $y=(k-3)x^2+3kx+5$의 그래프와 직선 $y=k(x-1)-2$가 만나지 않으므로 이차방정식

$(k-3)x^2+3kx+5=k(x-1)-2$, 즉

$(k-3)x^2+2kx+k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k-3)(k+7)<0$

$-4k+21<0$ $\therefore k>\frac{21}{4}$

$\therefore a=\frac{21}{4}$ 답 ③

0500 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=2x+8$에 평행하므로 $a=2$

직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2=2x+b$, 즉 $x^2+2x+b-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(b-2)=0$

$-b+3=0$ $\therefore b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

0501 직선 $y=-2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-2(x-k)+1$ $\therefore y=-2x+2k+1$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x=-2x+2k+1$, 즉 $x^2-2x-2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-2k-1)=0$

$2k+2=0$ $\therefore k=-1$ 답 -1

0502 이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=4-6+a \qquad \therefore a=5$

또, 직선 $y=bx+c$도 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=2b+c \qquad \therefore c=-2b+3$ …… ㉠

이때 직선 $y=bx-2b+3$이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x+5=bx-2b+3$, 즉

$x^2-(b+3)x+2b+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(b+3)\}^2-4(2b+2)=0$

$b^2-2b+1=0,\ (b-1)^2=0 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $c=1$

$\therefore a+b+c=7$

답 **7**

0503 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프에 접하므로

이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2-n+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-n+2)=0$

$\therefore 4am+m^2+4n-8=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m=0,\ m^2+4n-8=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=0,\ n=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2$

답 $\boldsymbol{y=2}$

0504 이차방정식 $-x^2+ax=x-b$, 즉 $x^2-(a-1)x-b=0$의 두 근이 $-1,\ 5$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+5=a-1$에서 $a=5$

$(-1)\times 5=-b$에서 $b=5$

$\therefore a+b=10$

답 ⑤

0505 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $x^2-1=ax+b$, 즉 $x^2-ax-1-b=0$의 두 근과 같다.

이때 이차방정식 $x^2-ax-1-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=a$에서 $a=2$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-1-b$에서 $b=1$

$\therefore a+b=3$

답 ③

0506 이차함수 $y=2x^2+3x+1$의 그래프와 직선 $y=5x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+3x+1=5x+k$, 즉

$2x^2-2x+1-k=0$ …… ㉠

의 실근과 같으므로 -2는 ㉠의 근이다.

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$8+4+1-k=0 \qquad \therefore k=13$

$k=13$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 점 B의 x좌표는 3이므로 $x=3$을 $y=5x+13$에 대입하면 $y=15+13=28$

즉, 점 B의 좌표는 $(3,\ 28)$이다.

답 $\boldsymbol{(3,\ 28)}$

0507 $y=-3x^2+6x+7=-3(x-1)^2+10$에서

$x=1$일 때 최댓값 10을 가지므로 $M=10$

$y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$에서

$x=2$일 때 최솟값 -3을 가지므로 $m=-3$

$\therefore M+m=7$

답 **7**

0508 ① $x=2$일 때 최댓값 0을 갖는다.

② $y=-2x^2+6x=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$이므로

$x=\dfrac{3}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{9}{2}$를 갖는다.

③ $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

④ $y=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$이므로

$x=1$일 때 최댓값 5를 갖는다.

⑤ $x=0$일 때 최댓값 1을 갖는다.

따라서 최댓값이 가장 큰 것은 ④이다.

답 ④

0509 이차함수 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+kx+4$의 그래프가 점 $(2,\ 10)$을 지나므로 $10=-2+2k+4 \qquad \therefore k=4$

따라서 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+4=-\dfrac{1}{2}(x-4)^2+12$이므로

$x=4$일 때 최댓값 12를 갖는다.

답 **12**

0510 x^2의 계수가 2이므로 주어진 이차함수의 식은

$y=2(x+5)(x-2)=2x^2+6x-20$

$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{49}{2}$

따라서 $a=6,\ b=-20$이고, $x=-\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\dfrac{49}{2}$를 가지므로 $m=-\dfrac{49}{2}$

$\therefore a+b-m=\dfrac{21}{2}$

답 $\boldsymbol{\dfrac{21}{2}}$

0511 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$가 $x=-2$에서 최댓값 13을 가지므로

$y=-2(x+2)^2+13=-2x^2-8x+5$

따라서 $a=-8,\ b=5$이므로 $a+b=-3$

답 $\boldsymbol{-3}$

0512 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x+2k+2=\dfrac{1}{4}(x+2)^2+2k+1$이므로

$x=-2$에서 최솟값 $2k+1$을 갖는다.

즉, $2k+1=11$이므로 $k=5$

답 ⑤

0513 $y=-x^2+2kx-2k$

$\quad=-(x-k)^2+k^2-2k$

이므로 $x=k$에서 최댓값 k^2-2k를 갖는다.

즉, $k^2-2k=8$이므로 $k^2-2k-8=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 -8이다. 답 -8

참고 이차방정식 $k^2-2k-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-8)=9>0$

이므로 $k^2-2k-8=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0514 이차함수 $y=ax^2+4x-a+1$이 $x=-1$에서 최솟값 b를 가지므로

$y=a(x+1)^2+b=ax^2+2ax+a+b$

즉, $2a=4$, $a+b=-a+1$이므로

$a=2$, $b=-3$

$\therefore ab=-6$ 답 ①

0515 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2+4ax+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-3$이고 최댓값이 6이므로 $x=-3$에서 최댓값 6을 갖는다.

$\therefore y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+6=-\frac{1}{3}x^2-2x+3$

즉, $4a=-2$, $b=3$이므로 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$

$\therefore ab=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0516 이차함수 $y=f(x)$가 $x=-1$에서 최댓값 4를 가지므로

$f(x)=a(x+1)^2+4\ (a<0)$로 놓으면

이 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=4a+4 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-(x+1)^2+4$이므로

$f(3)=-16+4=-12$ 답 -12

0517 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f(-3)=f(5)$이므로

$9-3a+b=25+5a+b \qquad \therefore a=-2$

.... ㉮

$f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $b-1$을 갖는다.

즉, $a=1$, $b-1=-4$이므로 $a=1$, $b=-3$

.... ㉯

$\therefore a+ab=1+(-2)\times(-3)=7$

.... ㉰

답 7

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	α, b의 값 구하기	50 %
㉰	$\alpha+ab$의 값 구하기	20 %

0518 $y=x^2+6ax+18a+3$

$\quad=(x+3a)^2-9a^2+18a+3$

이므로 $x=-3a$에서 최솟값 $-9a^2+18a+3$을 갖는다.

$\therefore m=-9a^2+18a+3=-9(a-1)^2+12$

따라서 m은 $a=1$일 때 최댓값 12를 갖는다. 답 12

0519 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+k=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2+k$

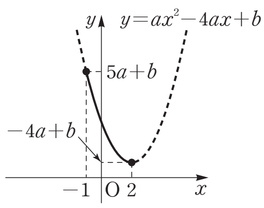
꼭짓점의 x좌표 -2가 $-4\le x\le 2$에 속하므로 최댓값은 $f(-2)=2+k$이다.

즉, $2+k=3$이므로 $k=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$에서 $f(-4)=1$, $f(2)=-5$이므로 최솟값은 -5이다. 답 -5

0520 $y=ax^2-4ax+b$

$\quad=a(x-2)^2-4a+b$



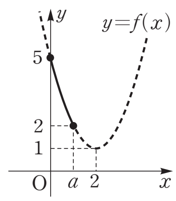
$-1\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-1$에서 최댓값 $5a+b$를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $-4a+b$를 가지므로 $5a+b=7$, $-4a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{11}{3}$

$\therefore a-b=-3$ 답 -3

0521 $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$



이라 하면 $0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $f(2)=1$이므로 $a<2$

이때 $f(0)=5$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 5를 갖고, $x=a$에서 최솟값 2를 갖는다.

즉, $f(a)=2$이므로

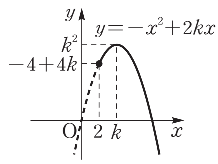
$a^2-4a+5=2$, $a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a<2)$ 답 1

0522 $y=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$

(i) $k\ge 2$일 때,

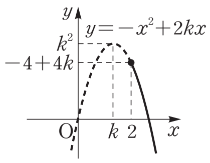
꼭짓점의 x좌표 k가 $x\ge 2$에 속하므로 오른쪽 그림에서 $x=k$일 때 최댓값 k^2을 갖는다.



즉, $k^2=16$이므로 $k=4\ (\because k\ge 2)$

(ii) $k<2$일 때,

꼭짓점의 x좌표 k가 $x\geq2$에 속하지 않으므로 오른쪽 그림에서 $x=2$일 때 최댓값 $-4+4k$를 갖는다.



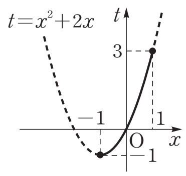
즉, $-4+4k=16$이므로 $k=5$

이때 $k<2$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=4$

답 4

0523 $x^2+2x=t$로 놓으면

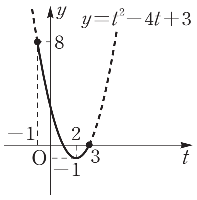


$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$-1\leq x\leq1$이므로 오른쪽 그림에서

$-1\leq t\leq3$

이때 주어진 함수는



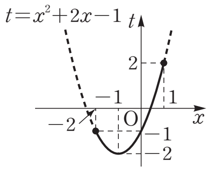
$y=t^2-4t+3$

$\quad=(t-2)^2-1\ (-1\leq t\leq3)$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값 8을 갖는다.

답 8

0524 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

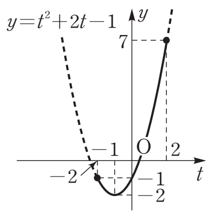


$t=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

$-2\leq x\leq1$이므로 오른쪽 그림에서

$-2\leq t\leq2$

이때 주어진 함수는



$y=t^2+2(t+1)-3=t^2+2t-1$

$\quad=(t+1)^2-2\ (-2\leq t\leq2)$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값 -2를 갖고, $t=2$일 때 최댓값 7을 가지므로 $M=7$, $m=-2$

$\therefore M+m=5$

답 5

0525 $x^2-4x+6=t$로 놓으면

$t=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$이므로 $t\geq2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+12t+k=-2(t-3)^2+k+18\ (t\geq2)$

따라서 $t=3$일 때 최댓값 $k+18$을 가지므로

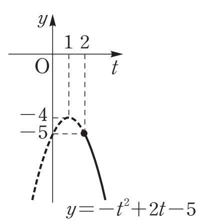
$k+18=3 \qquad \therefore k=-15$

답 ①

0526 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $t\geq2$

이때 주어진 함수는



$y=-t^2+2(t-3)+1=-t^2+2t-5$

$\quad=-(t-1)^2-4\ (t\geq2)$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=2$일 때 최댓값 -5를 갖는다.

이때 $t=2$에서 $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

즉, 주어진 함수는 $x=1$일 때 최댓값 -5를 가지므로

$a=1$, $b=-5 \qquad \therefore a+b=-4$

답 -4

0527 $2x^2-12x+y^2+4y+18=2(x-3)^2+(y+2)^2-4$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-3)^2\geq0$, $(y+2)^2\geq0$

$\therefore 2x^2-12x+y^2+4y+18\geq-4$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -4이다.

답 ②

0528 $-x^2-y^2-2x+4y+10=-(x+1)^2-(y-2)^2+15$

이때 x, y가 실수이므로

$(x+1)^2\geq0$, $(y-2)^2\geq0$

$\therefore -x^2-y^2-2x+4y+10\leq15$

㉮

따라서 주어진 식은 $x=-1$, $y=2$일 때 최댓값 15를 가지므로

$a=-1$, $b=2$, $c=15$

$\therefore a+b+c=16$

㉯

답 16

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식을 변형하여 완전제곱식 꼴로 나타내기	50 %
㉯	$a+b+c$의 값 구하기	50 %

0529 $x^2+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2x+4y+2z+5$

$=(x-1)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(z+2)^2+1$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\geq0$, $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\geq0$, $(z+2)^2\geq0$

$\therefore x^2+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2x+4y+2z+5\geq1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 1이다.

답 ①

0530 $x+y+3=0$에서 $y=-x-3$

$\therefore x^2+2y^2=x^2+2(-x-3)^2=3x^2+12x+18$

$\qquad\qquad\quad =3(x+2)^2+6$

이때 $-3\leq x\leq0$이므로 $x=-2$일 때 최솟값 6을 갖고, $x=0$일 때 최댓값 18을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $18+6=24$

답 24

0531 $2x+y=4$에서 $y=-2x+4$

$\therefore xy=x(-2x+4)=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$

이때 $-4\leq x\leq3$이므로 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖고, $x=-4$일 때 최솟값 -48을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $2-(-48)=50$

답 50

0532 $x+y=1$에서 $y=1-x$ ⋯⋯ ㉠

이때 $x\geq0$, $y\geq0$이므로

$x\geq0$, $y=1-x\geq0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq1$

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+y^2=2x^2+(1-x)^2=3x^2-2x+1$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0\leq x\leq1$에서 $x=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖고, $x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

답 **최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$**

0533 점 $P(a, b)$가 직선 $x-3y+4=0$ 위를 움직이므로

$a-3b+4=0$ $\quad\therefore a=3b-4$

$\therefore a^2-b^2=(3b-4)^2-b^2=8b^2-24b+16$

$=8\left(b-\frac{3}{2}\right)^2-2$

따라서 $b=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 **-2**

유형 up

본문 76쪽

0534 $-x^2+9=0$에서 $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

즉, 이차함수 $y=-x^2+9$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -3, 3이다.

점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<3)$이라 하면

$A(-a, 0)$, $C(a, -a^2+9)$

$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+9$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(2a-a^2+9)=-2a^2+4a+18$

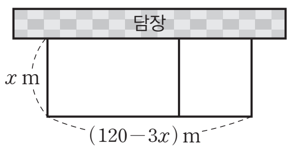
$=-2(a-1)^2+20$

이때 $0<a<3$이므로 $a=1$일 때 최댓값 20을 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

답 **20**

0535 오른쪽 그림과 같이 우리의 세로의 길이를 x m라 하면 전체 우리의 가로의 길이는 $(120-3x)$ m이다.



이때 $x>0$, $120-3x>0$이므로 $0<x<40$

전체 우리의 넓이를 y m^{2}라 하면

$y=x(120-3x)=-3x^2+120x$

$=-3(x-20)^2+1200$

이때 $0<x<40$이므로 $x=20$일 때 최댓값 1200을 갖는다.

따라서 전체 우리의 최대 넓이는 1200 m^{2}이다.

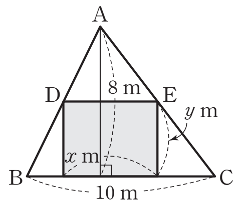
답 **1200 m^2**

0536 $h(t)=-5t^2+30t+18=-5(t-3)^2+63$

$2\leq t\leq5$이고 $h(2)=58$, $h(3)=63$, $h(5)=43$이므로 이 공의 최소 높이는 43 m이다.

답 **43 m**

0537 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면



$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$ (AA 닮음)이므로

$10:x=8:(8-y)$

$8x=80-10y$ $\quad\therefore y=8-\frac{4}{5}x$

이때 $x>0$, $8-\frac{4}{5}x>0$이므로 $0<x<10$

직사각형의 넓이를 S m^{2}라 하면

$S=x\left(8-\frac{4}{5}x\right)=-\frac{4}{5}x^2+8x$

$=-\frac{4}{5}(x-5)^2+20$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최댓값 20을 갖는다.

$x=5$일 때 $y=8-\frac{4}{5}\times5=4$이므로 구하는 밭의 둘레의 길이는

$2(5+4)=18$ (m)

답 **18 m**

0538 A패키지 상품의 예약자를 x명, 총 판매 금액을 y원이라 하면

(i) $0\leq x\leq30$일 때

$y=50000x$

따라서 예약자가 30명일 때 총 판매 금액의 최댓값은 1500000원이다.

(ii) $30<x\leq45$일 때

(상품 가격)$=50000-(x-30)\times1000$

$=80000-1000x$

$\therefore y=(80000-1000x)x$

$=-1000x^2+80000x$

$=-1000(x-40)^2+1600000$

따라서 예약자가 40명일 때 총 판매 금액의 최댓값은 1600000원이다.

(i), (ii)에서 총 판매 금액이 최대가 되려면 예약자 수는 40명이어야 한다.

답 **40명**

0539 액자의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 액자의 둘레의 길이가 216 cm이므로

$2(x+y)=216$ $\quad\therefore y=108-x$

이때 사진의 가로의 길이는 $(x-6)$ cm, 세로의 길이는 $y-12=108-x-12=96-x$ (cm)이고

$x-6>0$, $96-x>0$ $\quad\therefore 6<x<96$

사진의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(x-6)(96-x)=-x^2+102x-576$

$=-(x-51)^2+2025$

이때 $6<x<96$이므로 $x=51$, 즉 $y=108-51=57$일 때 최댓값 2025를 갖는다. 따라서 사진의 넓이를 최대로 하는 액자의 짧은 변의 길이는 51 cm이다. **답 51 cm**

시험에 꼭 나오는 문제

본문 77~79쪽

0540 이차함수 $y=x^2-2kx+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ $(\alpha>\beta)$이라 하면 이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k$ …… ㉠

이때 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\alpha-\beta=2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=8$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4k^2-4k=8$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ $(\because k>0)$ **답 2**

0541 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+5)=0$이려면

$x+5=\alpha$ 또는 $x+5=\beta$

$\therefore x=\alpha-5$ 또는 $x=\beta-5$

따라서 이차방정식 $f(x+5)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha-5)+(\beta-5)=\alpha+\beta-10$

$=-3-10=-13$ **답 −13**

0542 이차함수 $y=-x^2+4x+2-k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $-x^2+4x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(2-k)>0$

$\therefore k<6$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 5이다. **답 ④**

0543 이차함수 $y=x^2-2ax+2am-2m+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+2am-2m+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(2am-2m+b)=0$

$\therefore a^2-b-2m(a-1)=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-b=0$, $a-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore ab=1$ **답 ②**

0544 이차함수 $y=3x^2-4x+k$의 그래프와 직선 $y=8x+12$가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $3x^2-4x+k=8x+12$, 즉 $3x^2-12x+k-12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3(k-12)=0$

$72-3k=0$ $\therefore k=24$ **답 24**

0545 이차함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-b=0$

$\therefore b=a^2$ …… ㉠

이차함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프가 직선 $y=4x$와 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2ax+b=4x$, 즉 $x^2+2(a-2)x+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a-2)^2-b<0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a-2)^2-a^2<0$, $-4a+4<0$

$\therefore a>1$ **답 ⑤**

0546 점 $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-3)+2$, 즉 $y=mx-3m+2$로 놓자.

이 직선이 이차함수 $y=-x^2-2x+8$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-2x+8=mx-3m+2$, 즉 $x^2+(m+2)x-3m-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+2)^2-4(-3m-6)=0$

$\therefore m^2+16m+28=0$

이 이차방정식의 두 실근이 두 접선의 기울기이므로 구하는 두 직선의 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 28이다. **답 28**

0547 이차방정식 $3x^2-ax+1=2x-b$, 즉 $3x^2-(a+2)x+1+b=0$의 두 근이 -2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2)+3=\frac{a+2}{3}$에서 $a=1$

$(-2)\times3=\frac{1+b}{3}$에서 $b=-19$

$\therefore a+b=-18$ **답 ②**

0548 $y=-x^2+2ax-a^2+2a-4$

$=-(x-a)^2+2a-4$

이므로 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(a,\ 2a-4)$

이때 꼭짓점이 직선 $4x-3y+2=0$ 위에 있으므로

$4a-3(2a-4)+2=0 \qquad \therefore a=7$

따라서 주어진 이차함수는 $y=-(x-7)^2+10$이므로 $x=7$일 때 최댓값 10을 갖는다.

답 **10**

0549 $y=x^2-4ax+16a-5$

$\quad =(x-2a)^2-4a^2+16a-5$

이므로 $x=2a$일 때 최솟값 $-4a^2+16a-5$를 갖는다.

$\therefore f(a)=-4a^2+16a-5=-4(a-2)^2+11$

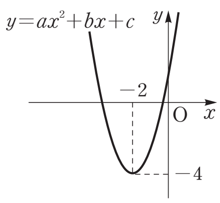
따라서 $f(a)$의 최댓값은 11이다.

답 **11**

0550 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=-2$일 때 최솟값 -4를 가지므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -4)$이고 $a>0$이다.

따라서 $y=a(x+2)^2-4$로 놓고 그래프가 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않으려면 (y절편)≥ 0이어야 하므로

$4a-4\geq 0 \qquad \therefore a\geq 1$

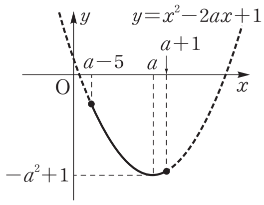


답 ③

0551 $y=x^2-2ax+1$

$\quad =(x-a)^2-a^2+1$

$a-5\leq x\leq a+1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a-5$일 때 최댓값

$(a-5-a)^2-a^2+1$, 즉

$-a^2+26$을 가지므로

$-a^2+26=-10,\ a^2=36$

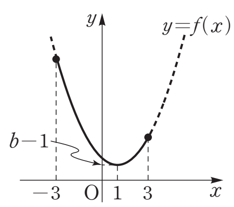
$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 ③

0552 (가)에서 $4-2a+b=16+4a+b \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$

$-3\leq x\leq 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-3$일 때 최댓값 $b+15$를 가지므로 (나)에서

$b+15=20 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=3$

답 **3**

0553 $2x^2-8x+y^2+2y+6=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-2)^2\geq 0,\ (y+1)^2\geq 0 \qquad \therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -3이다.

답 ②

0554 장미 한 송이의 가격이 $(2000+10x)$원일 때 하루 판매량은 $(300-x)$송이이므로 하루 판매 금액을 y원이라 하면

$y=(2000+10x)(300-x)=-10x^2+1000x+600000$

$\quad =-10(x-50)^2+625000\ (0<x<300)$

따라서 $x=50$일 때 하루 판매 금액이 최대이므로 그때의 가격은

$2000+10\times 50=2500$(원)

답 ⑤

0555 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=3x-2$의 한 교점의 x좌표가 $2-\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$은 이차방정식 $x^2+ax+b=3x-2$, 즉 $x^2+(a-3)x+b+2=0$의 한 근이다.

㉮

이때 이 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이고 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

㉯

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-(a-3)$에서 $a=-1$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b+2$에서 $b=-1$

㉰

$\therefore a+b=-2$

㉱

답 **-2**

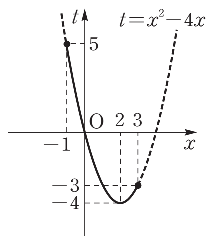
단계	채점요소	배점
㉮	한 근이 $2-\sqrt{3}$인 이차방정식 세우기	30 %
㉯	이차방정식의 다른 한 근 구하기	20 %
㉰	a, b의 값 구하기	30 %
㉱	$a+b$의 값 구하기	20 %

0556 $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$-1\leq x\leq 3$이므로 오른쪽 그림에서

$-4\leq t\leq 5$



㉮

이때 주어진 함수는

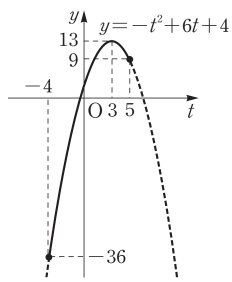
$y=(t+1)^2-2(t-1)^2+5$

$\quad =-t^2+6t+4$

$\quad =-(t-3)^2+13\ (-4\leq t\leq 5)$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=3$일 때 최댓값 13을 갖고, $t=-4$일 때 최솟값 -36을 가지므로

$M=13,\ m=-36$



㉯

$\therefore M+m=-23$

㉰

답 **-23**

단계	채점요소	배점
㉮	공통부분을 t로 치환하고 t의 값의 범위 구하기	30 %
㉯	M, m의 값 구하기	50 %
㉰	$M+m$의 값 구하기	20 %

0557 $2x+y^2=5$에서 $y^2=5-2x$ …… ㉠

y가 실수이므로 $y^2=5-2x\geq0$ $\quad\therefore x\leq\frac{5}{2}$

……… ㉮

㉠을 x^2-3y^2에 대입하면

$x^2-3y^2=x^2-3(5-2x)=x^2+6x-15$

$=(x+3)^2-24$

……… ㉯

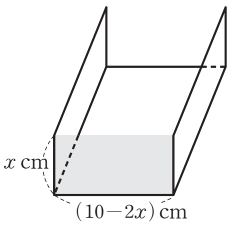
이때 $x\leq\frac{5}{2}$이므로 $x=-3$일 때 최솟값 -24를 갖는다.

……… ㉰

답 -24

단계	채점요소	배점
㉮	y를 x에 대한 식으로 나타내고 x의 값의 범위 구하기	40 %
㉯	x^2-3y^2을 x에 대한 이차식으로 나타내기	40 %
㉰	x^2-3y^2의 최솟값 구하기	20 %

0558 오른쪽 그림과 같이 물받이의 높이를 x cm라 하면 단면은 가로의 길이가 $(10-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm인 직사각형이다.



색칠한 단면의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(10-2x)=-2x^2+10x$

$=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$

……… ㉮

이때 $x>0$, $10-2x>0$이므로 $0<x<5$

……… ㉯

따라서 $x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{25}{2}$를 가지므로

$S=\frac{25}{2}$, $h=\frac{5}{2}$

……… ㉰

$\therefore S+h=\frac{25}{2}+\frac{5}{2}=15$

……… ㉱

답 15

단계	채점요소	배점
㉮	단면의 넓이에 대한 식 세우기	40 %
㉯	x의 값의 범위 구하기	30 %
㉰	S, h의 값 구하기	20 %
㉱	$S+h$의 값 구하기	10 %

0559 점 A는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 y축의 교점이므로 $A(0,\ 2)$

또, 두 점 B, C는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 x축의 교점이므로 두 점 B, C의 x좌표는

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore B(1,\ 0)$, $C(2,\ 0)$

점 $P(a,\ b)$는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-3a+2$

이때 점 P가 점 A에서 점 C까지 움직이므로 $0\leq a\leq2$

$\therefore a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3=(a-1)^2+4$

따라서 주어진 식은 $a=1$일 때 최솟값 4를 갖고, $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값 5를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$5+4=9$

답 9

0560 $f(x)=x^2-2|x|+k$라 하면

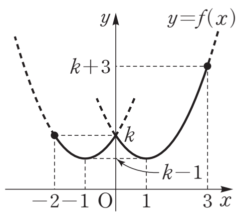
(i) $-2\leq x<0$일 때,

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

(ii) $0\leq x\leq3$일 때,

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

(i), (ii)에서 $-2\leq x\leq3$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 최댓값 $k+3$을 갖는다.



즉, $k+3=4$이므로 $k=1$

이때 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최솟값 $k-1$을 가지므로 구하는 최솟값은 $1-1=0$

답 0

0561 이차함수 $y=(x+a)(x+b)+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $(x+a)(x+b)+1=0$, 즉 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$

$(a-b)^2<4$ $\quad\therefore |a-b|<2$

즉, 두 눈의 수의 차가 0 또는 1인 경우이다.

(i) $|a-b|=0$일 때

순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$

의 6개이다.

(ii) $|a-b|=1$일 때

순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$,

$(6,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(2,\ 1)$

의 10개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$는 모두 16개이므로 구하는 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

답 $\frac{4}{9}$

07 여러 가지 방정식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 81쪽, 83쪽

0562 $x^3-27=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

0563 $x^3-x^2-12x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-x-12)=0,\ x(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=4$

답 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

0564 $x^4-8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-8)=0,\ x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{3}i}$

0565 $f(x)=x^3-4x^2+3x+2$로 놓으면

$f(2)=8-16+6+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

답 $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}}$

0566 $f(x)=x^3+x+10$으로 놓으면

$f(-2)=-8-2+10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm2i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm2i}$

0567 $f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$으로 놓으면

$f(-1)=1-1-1+7-6=0$

$f(2)=16+8-4-14-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

답 $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}i}$

0568 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$로 놓으면

$f(2)=16-24+4+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x-2)^2(x^2+x+1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)^2(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=2$ (중근) 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=2}$ **(중근) 또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

0569 $x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-8=0,\ (t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$, 즉 $x^2+3x=-2$일 때

$x^2+3x+2=0,\ (x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $t=4$, 즉 $x^2+3x=4$일 때

$x^2+3x-4=0,\ (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $\boldsymbol{x=-4}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

0570 $x^2+1=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$4t^2-13t+10=0,\ (4t-5)(t-2)=0$

$\therefore t=\dfrac{5}{4}$ 또는 $t=2$

(i) $t=\dfrac{5}{4}$, 즉 $x^2+1=\dfrac{5}{4}$일 때

$x^2=\dfrac{1}{4}\quad \therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$

(ii) $t=2$, 즉 $x^2+1=2$일 때

$x^2=1 \quad \therefore x=\pm1$

(i), (ii)에서 $x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm1$

답 $\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm1}$

0571 $x^2-2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-5t-24=0$, $(t+3)(t-8)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=8$

(i) $t=-3$, 즉 $x^2-2x=-3$일 때

$x^2-2x+3=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{2}i$

(ii) $t=8$, 즉 $x^2-2x=8$일 때

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}i}$

0572 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

따라서 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

답 $\boldsymbol{x=\pm1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm2}$

0573 $x^4+x^2+1=0$에서 $x^4+2x^2+1-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$, $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

0574 $3x^4-4x^3+6x^2-4x+3=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$3x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}=0$

$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$3t^2-4t=0$, $t(3t-4)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$

(i) $t=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=0$일 때

$x^2+1=0$, $x^2=-1 \quad \therefore x=\pm i$

(ii) $t=\frac{4}{3}$, 즉 $x+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$일 때

$3x^2-4x+3=0 \quad \therefore x=\frac{2\pm\sqrt{5}i}{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm i$ 또는 $x=\frac{2\pm\sqrt{5}i}{3}$

답 $\boldsymbol{x=\pm i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{2\pm\sqrt{5}i}{3}}$

0575 $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+5t+6=0$, $(t+3)(t+2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-2$

(i) $t=-3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-3$일 때

$x^2+3x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $t=-2$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-2$일 때

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$ (중근)

(i), (ii)에서 $x=-1$ (중근) 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $\boldsymbol{x=-1}$ **(중근) 또는** $\boldsymbol{x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$

0576 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{4}{1}=-4$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{2}{1}=2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{-6}{1}=6$

답 (1) $\boldsymbol{-4}$ (2) $\boldsymbol{2}$ (3) $\boldsymbol{6}$

0577 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-4$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=5^2-2\times(-2)=29$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1$

$=-4+5+(-2)+1=0$

답 (1) $\boldsymbol{29}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (3) $\boldsymbol{0}$

0578 x^3의 계수가 1이고 세 근이 -2, 1, 3인 삼차방정식은

$x^3-(-2+1+3)x^2+\{(-2)\times1+1\times3+3\times(-2)\}x$

$-\{(-2)\times1\times3\}=0$

$\therefore x^3-2x^2-5x+6=0$

답 $\boldsymbol{x^3-2x^2-5x+6=0}$

0579 x^3의 계수가 2이고 세 근이 -1, $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$인 삼차방정식은

$$2[x^3-(-1+3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})x^2$$
$$+\{(-1)\times(3+\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\times(-1)\}x$$
$$-\{(-1)\times(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})\}]=0$$

$2(x^3-5x^2-2x+4)=0$ $\quad\therefore 2x^3-10x^2-4x+8=0$

답 $\mathbf{2x^3-10x^2-4x+8=0}$

0580 x^3의 계수가 -1이고 세 근이 1, $2i$, $-2i$인 삼차방정식은

$$-[x^3-(1+2i-2i)x^2+\{1\times2i+2i\times(-2i)+(-2i)\times1\}x$$
$$-\{1\times2i\times(-2i)\}]=0$$

$-(x^3-x^2+4x-4)=0$ $\quad\therefore -x^3+x^2-4x+4=0$

답 $\mathbf{-x^3+x^2-4x+4=0}$

0581 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$이 근이면 $1+\sqrt{3}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2)\times(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\times(-2)=a$

$\therefore a=-6$

$(-2)\times(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})=-b$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore a+b=-10$

답 $\mathbf{-10}$

0582 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+3i$가 근이면 $-2-3i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 2, $-2+3i$, $-2-3i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+(-2+3i)+(-2-3i)=-a$ $\quad\therefore a=2$

$2\times(-2+3i)\times(-2-3i)=-b$ $\quad\therefore b=-26$

$\therefore ab=-52$

답 $\mathbf{-52}$

0583 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-2i$가 근이면 $2i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2i)+2i=-1$ $\quad\therefore \alpha=-1$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -1, $-2i$, $2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)\times(-2i)+(-2i)\times2i+2i\times(-1)=a$ $\quad\therefore a=4$

$(-1)\times(-2i)\times2i=-b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a-b=0$

답 $\mathbf{0}$

0584 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

(2) $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}=-1-1=-2$

(3) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+1$$
$$=\omega^2+\omega+1=0$$

답 (1) $\mathbf{0}$ (2) $\mathbf{-2}$ (3) $\mathbf{-1}$ (4) $\mathbf{0}$

0585 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

(2) $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=1+1=2$

(3) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$

(4) $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+1$$
$$=\omega^2-\omega+1=0$$

답 (1) $\mathbf{0}$ (2) $\mathbf{2}$ (3) $\mathbf{1}$ (4) $\mathbf{0}$

0586 $x-y=-2$에서 $y=x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2=20$, $2x^2+4x-16=0$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

㉠에서 $x=-4$일 때 $y=-2$, $x=2$일 때 $y=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

답 $\begin{cases}\mathbf{x=-4}\\\mathbf{y=-2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\mathbf{x=2}\\\mathbf{y=4}\end{cases}$

0587 $x-3y=0$에서 $x=3y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=40$에 대입하면

$(3y)^2+y^2=40$, $10y^2=40$

$y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm2$

㉠에서 $y=2$일 때 $x=6$, $y=-2$일 때 $x=-6$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-6\\y=-2\end{cases}$

답 $\begin{cases}\mathbf{x=6}\\\mathbf{y=2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\mathbf{x=-6}\\\mathbf{y=-2}\end{cases}$

0588 $x+y=1$에서 $x=1-y$ …… ㉠

㉠을 $4y^2-x^2=15$에 대입하면

$4y^2-(1-y)^2=15$, $3y^2+2y-16=0$

$(3y+8)(y-2)=0$　　$\therefore y=-\frac{8}{3}$ 또는 $y=2$

㉠에서 $y=-\frac{8}{3}$일 때 $x=\frac{11}{3}$, $y=2$일 때 $x=-1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{11}{3}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{8}{3}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$

0589 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+2y)=0$　　$\therefore x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2-y^2=8$, $2y^2=8$, $y^2=4$　　$\therefore y=\pm2$

$\therefore x=2$, $y=2$ 또는 $x=-2$, $y=-2$

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+2\times(-2y)\times y-y^2=8$, $-y^2=8$

$y^2=-8$　　$\therefore y=\pm2\sqrt{2}i$

$\therefore x=-4\sqrt{2}i$, $y=2\sqrt{2}i$ 또는 $x=4\sqrt{2}i$, $y=-2\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4\sqrt{2}i \\ y=2\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\sqrt{2}i \\ y=-2\sqrt{2}i \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-4\sqrt{2}i} \\ \boldsymbol{y=2\sqrt{2}i} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=4\sqrt{2}i} \\ \boldsymbol{y=-2\sqrt{2}i} \end{cases}$

0590 $\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=12-2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(3x-y)=0$　　$\therefore y=-x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x)^2=12-2x$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore x=-3$, $y=3$ 또는 $x=2$, $y=-2$

(ii) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(3x)^2=12-2x$, $5x^2+x-6=0$

$(5x+6)(x-1)=0$　　$\therefore x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=1$

$\therefore x=-\frac{6}{5}$, $y=-\frac{18}{5}$ 또는 $x=1$, $y=3$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{18}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\frac{6}{5}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{18}{5}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$

0591 $x+y=2$, $xy=-8$에서 x, y는 이차방정식

$t^2-2t-8=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

0592 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=10$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-6=10$, $(x+y)^2=16$

$\therefore x+y=\pm4$

(i) $x+y=4$, $xy=3$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$　　$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

(ii) $x+y=-4$, $xy=3$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2+4t+3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

$\therefore x=-3$, $y=-1$ 또는 $x=-1$, $y=-3$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases}$

유형 익/히/기

본문 84~91쪽

0593 $f(x)=x^3-2x^2-9x+18$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-9)=(x-2)(x+3)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -3이므로 구하는 두 근의 곱은

$3\times(-3)=-9$

답 ①

0594 $f(x)=x^3+x^2+2x+8$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ & & -2 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-x+4)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x^2-x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=15$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-2+1+15=14$ 답 **14**

0595 $f(x)=x^4-4x^2+12x-9$로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 12 & -9 \\ & & 1 & 1 & -3 & 9 \\ \hline -3 & 1 & 1 & -3 & 9 & \boxed{0} \\ & & -3 & 6 & -9 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+3)(x^2-2x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 모든 실근의 합은 $1+(-3)=-2$ 답 **-2**

0596 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+2x-4$로 놓으면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -4 \\ & & -1 & 4 & -6 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 6 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)=0$

이때 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times2=0$ 답 **0**

0597 $x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t-10=0$, $(t+2)(t-5)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

(i) $t=-2$, 즉 $x^2+4x=-2$일 때

$x^2+4x+2=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{2}$

(ii) $t=5$, 즉 $x^2+4x=5$일 때

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 사차방정식의 근이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0598 $x^2-2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t-4)(t-2)-3=0$, $t^2-6t+5=0$

$(t-1)(t-5)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=5$

(i) $t=1$, 즉 $x^2-2x=1$일 때

$x^2-2x-1=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 두 근의 곱은 -1이다.

(ii) $t=5$, 즉 $x^2-2x=5$일 때

$x^2-2x-5=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 두 근의 곱은 -5이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$(-1)\times(-5)=5$ 답 **5**

0599 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+63=0$에서

$\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+63=0$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+63=0$

$x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t-5)(t-21)+63=0$, $t^2-26t+168=0$

$(t-12)(t-14)=0$ $\therefore t=12$ 또는 $t=14$

(i) $t=12$, 즉 $x^2+4x=12$일 때

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

(ii) $t=14$, 즉 $x^2+4x=14$일 때

$x^2+4x-14=0$ $\therefore x=-2\pm3\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양수인 근은 2, $-2+3\sqrt{2}$이므로 구하는 합은 $2+(-2+3\sqrt{2})=3\sqrt{2}$ 답 **$3\sqrt{2}$**

0600 $x(x+1)(x+2)(x+3)-3=0$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-3=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-3=0$

$x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t(t+2)-3=0$, $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$, 즉 $x^2+3x=-3$일 때

$x^2+3x+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\times1\times3=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=1$, 즉 $x^2+3x=1$일 때

$x^2+3x-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times(-1)=13>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+3x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4\times3$

$=-3$

답 -3

0601 $x^4-6x^2+1=0$에서

$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$, $(x^2-1)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$

$x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 양수인 근의 곱은

$(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1$

답 ①

0602 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=9$

따라서 $x^2=1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|3|+|-3|$

$=8$

답 8

0603 $x^4-20x^2+4=0$에서

$(x^4-4x^2+4)-16x^2=0$, $(x^2-2)^2-(4x)^2=0$

$(x^2+4x-2)(x^2-4x-2)=0$

$x^2+4x-2=0$ 또는 $x^2-4x-2=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 네 실근 중 가장 큰 근은 $2+\sqrt{6}$, 가장 작은 근은 $-2-\sqrt{6}$이므로

$\alpha=2+\sqrt{6}$, $\beta=-2-\sqrt{6}$

$\therefore \alpha-\beta=4+2\sqrt{6}$

답 $4+2\sqrt{6}$

0604 $x^4-11x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-x^2=0$, $(x^2-5)^2-x^2=0$

$(x^2+x-5)(x^2-x-5)=0$

$\therefore x^2+x-5=0$ 또는 $x^2-x-5=0$

$x^2+x-5=0$의 두 근을 α, β라 하고 $x^2-x-5=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-5$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-5$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$

$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$

$=\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)$

$=0$

답 0

0605 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

(i) $t=1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=3$일 때

$x^2-3x+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2-3x+1=0$의 한 실근이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

양변을 α $(\alpha\neq0)$로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0$ $\quad\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

답 ③

0606 $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2-3t-4=0$

㉮

$(t+1)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

(i) $t=-1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-1$일 때

$x^2+x+1=0$ $\quad\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=4$, 즉 $x+\frac{1}{x}=4$일 때

$x^2-4x+1=0$ $\quad\therefore x=2\pm\sqrt{3}$

㉯

(i), (ii)에서 두 실근의 합은 $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

㉰

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	$x+\frac{1}{x}$을 t로 치환하여 t에 대한 이차방정식으로 나타내기	40 %
㉯	주어진 방정식의 해 구하기	40 %
㉰	두 실근의 합 구하기	20 %

0607 $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

(i) $t=-1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-1$일 때

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=3$일 때

$x^2-3x+1=0 \qquad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은 3, 두 허근의 곱은 1이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=4$

답 **4**

0608 $f(x)=x^3+ax+6$으로 놓으면 주어진 방정식의 한 근이 -3이므로

$f(-3)=-27-3a+6=0 \qquad \therefore a=-7$

$f(x)=x^3-7x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+3)(x^2-3x+2)$

즉, $(x+3)(x^2-3x+2)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$

$\therefore a+\alpha+\beta=-4$

답 ①

0609 $2x^3+x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{3}$이므로

$2(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^2+a\sqrt{3}+b=0$

$6\sqrt{3}+3+a\sqrt{3}+b=0$

$(3+b)+(6+a)\sqrt{3}=0$

a, b가 유리수이므로 $3+b=0$, $6+a=0$

따라서 $a=-6$, $b=-3$이므로 $ab=18$

답 **18**

0610 $f(x)=x^3+ax^2+7bx-12b$로 놓으면 주어진 방정식의 두 근이 2, 3이므로

$f(2)=8+4a+14b-12b=0$, $f(3)=27+9a+21b-12b=0$

즉, $2a+b=-4$, $a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$f(x)=x^3-x^2-14x+24$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -14 & 24 \\ & & 2 & 2 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+x-12)$

$\quad=(x-2)(x-3)(x+4)$

즉, $(x-2)(x-3)(x+4)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-4$

따라서 나머지 한 근은 -4이다.

답 **−4**

0611 $f(x)=x^4+4x^3-2ax^2-(2a+1)x-10$으로 놓으면 주어진 방정식의 한 근이 2이므로

$f(2)=16+32-8a-4a-2-10=0 \qquad \therefore a=3$

$f(x)=x^4+4x^3-6x^2-7x-10$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 4 & -6 & -7 & -10 \\ & & 2 & 12 & 12 & 10 \\ \hline -5 & 1 & 6 & 6 & 5 & \boxed{0} \\ & & -5 & -5 & -5 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x+5)(x^2+x+1)$

즉, $(x-2)(x+5)(x^2+x+1)=0$에서 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

따라서 두 허근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다.

답 **−1**

0612 $f(x)=x^3-(a-3)x^2+ax-4$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a+3 & a & -4 \\ & & 1 & -a+4 & 4 \\ \hline & 1 & -a+4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(-a+4)x+4\}$

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+(-a+4)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때

$1+(-a+4)+4=0 \qquad \therefore a=9$

(ii) 방정식 $x^2+(-a+4)x+4=0$이 중근을 가질 때

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a+4)^2-16=0$

$a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$9+0+8=17$

답 ⑤

0613 $f(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$로 놓으면

$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 하므

로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다. **답 1**

0614 $f(x)=3x^3+3x^2+kx+k$로 놓으면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 3 & k & k \\ & & -3 & 0 & -k \\ \hline & 3 & 0 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(3x^2+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $3x^2+k=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0-12k<0 \qquad \therefore k>0$ **답 $k>0$**

0615 $f(x)=x^3+3x^2+(a-4)x-a$로 놓으면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & a-4 & -a \\ & & 1 & 4 & a \\ \hline & 1 & 4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+a)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 실근이 한 개뿐이려면

(i) 이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 실근을 갖지 않을 때

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a<0 \qquad \therefore a>4$

(ii) 이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 때

이를 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $a>4$이므로 정수 a의 최솟값은 5이다. **답 5**

0616 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9,\ \alpha\beta\gamma=5$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}&=\frac{5-\alpha}{\alpha}+\frac{5-\beta}{\beta}+\frac{5-\gamma}{\gamma}\\&=\frac{5}{\alpha}-1+\frac{5}{\beta}-1+\frac{5}{\gamma}-1\\&=5\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3\\&=5\times\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3\\&=5\times\frac{9}{5}-3\\&=6\end{aligned}$$

답 ①

0617 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=9$

$$\begin{aligned}\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)&=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=1-(-3)+4-9=-1\end{aligned}$$

답 -1

0618 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5,\ \alpha\beta\gamma=-1$ ㉮

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}&=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\&=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\\&=\frac{(-5)^2-2\times(-1)\times(-3)}{(-1)^2}\\&=19\end{aligned}$$

㉯

답 19

단계	채점요소	배점
㉮	삼차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기	40 %
㉯	$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$의 값 구하기	60 %

0619 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha\ (\alpha\neq 0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=-12$에서 $6\alpha=-12 \qquad \therefore \alpha=-2$

따라서 세 근이 $-2,\ -4,\ -6$이므로

$(-2)\times(-4)+(-4)\times(-6)+(-6)\times(-2)=a$

$(-2)\times(-4)\times(-6)=-b$

$\therefore a=44,\ b=48$

$\therefore a+b=92$ **답 92**

0620 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{1}=-2$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{1}=1$

즉, $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x-1=0$

따라서 $a=2,\ b=-3,\ c=-1$이므로

$abc=2\times(-3)\times(-1)=6$ **답 ③**

0621 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-1$

이때 $\alpha+\beta=-\gamma,\ \beta+\gamma=-\alpha,\ \gamma+\alpha=-\beta$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)&=(-\gamma)+(-\alpha)+(-\beta)\\&=-(\alpha+\beta+\gamma)=0\end{aligned}$$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$
$=(-\gamma)(-\alpha)+(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$
$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)$
$=-\alpha\beta\gamma=1$
따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3+2x-1=0$ 답 $x^3+2x-1=0$

0622 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-a$이므로
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=-b$에서
$4+3=-b \qquad \therefore b=-7$
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=c$에서
$-1+2\times4+3=c \qquad \therefore c=10$
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=-12$에서
$-a+(-1)+4+1=-12 \qquad \therefore a=16$
$\therefore a+b+c=16+(-7)+10=19$ 답 19

0623 $f(1)=f(2)=f(4)=-1$에서
$f(1)+1=f(2)+1=f(4)+1=0$이므로 삼차방정식
$f(x)+1=0$의 세 근이 1, 2, 4이다.
이때 1, 2, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(1+2+4)x^2+(1\times2+2\times4+4\times1)x-1\times2\times4=0$
$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$
즉, $f(x)+1=x^3-7x^2+14x-8$이므로
$f(x)=x^3-7x^2+14x-9$
따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 9이다. 답 9

0624 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=-a$에서 $2+\alpha=-a$ …… ㉠
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha+\alpha(1+\sqrt{2})=b$에서
$-1+2\alpha=b$ …… ㉡
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\alpha=3$에서 $-\alpha=3 \qquad \therefore \alpha=-3$
$\alpha=-3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=1$, $b=-7$
$\therefore ab=-7$ 답 ⑤

0625 계수가 실수이므로 $2-\sqrt{3}i$가 근이면 $2+\sqrt{3}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\alpha=-14 \qquad \therefore \alpha=-2$
따라서 나머지 두 근의 합은
$(2+\sqrt{3}i)+(-2)=\sqrt{3}i$ 답 ③

0626 계수가 실수이므로 $\frac{2}{1-i}=1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+i)+(1-i)+2=-\frac{b}{a}$에서 $\frac{b}{a}=-4$ …… ㉠
$(1+i)(1-i)+2(1-i)+2(1+i)=\frac{c}{a}$에서
$\frac{c}{a}=6$ …… ㉡
$2(1+i)(1-i)=\frac{4}{a}$에서 $a=1$
$a=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $b=-4$, $c=6$
$\therefore a+b+c=1+(-4)+6=3$ 답 3

0627 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{5}$가 근이면 $1+\sqrt{5}$도 근이다.
$-1+(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=1$
$(-1)(1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})(-1)=-6$
$(-1)(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=4$
따라서 -1, $1-\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-x^2-6x-4=0$이므로
$f(x)=x^3-x^2-6x-4$
$\therefore f(2)=8-4-12-4=-12$ 답 -12

0628 밑면의 반지름의 길이를 x m 늘였다고 하면 원래의 물탱크의 부피와 새로운 물탱크의 부피가 같으므로
$\pi\times4^2\times4=\pi(4+x)^2(4-x)$
$64=-x^3-4x^2+16x+64$, $x^3+4x^2-16x=0$
$x(x^2+4x-16)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{5}$
그런데 $0<x<4$이어야 하므로 $x=-2+2\sqrt{5}$
따라서 새로운 물탱크의 밑면의 반지름의 길이는
$4+x=4+(-2+2\sqrt{5})=2+2\sqrt{5}$ (m) 답 ②

0629 구멍을 파낸 후 남은 부분의 부피가 26 m^3이므로
$x^3-1\times1\times\frac{x}{3}=26$
$3x^3-x-78=0$, $(x-3)(3x^2+9x+26)=0$
이때 $x>1$인 실수이어야 하므로 $x=3$ 답 ④

0630 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면
$V=5x^3$, $S=20x^2$이므로 $V+S=40$에서
$5x^3+20x^2=40$
$x^3+4x^2-8=0$, $(x+2)(x^2+2x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$
이때 $x>0$이어야 하므로 $x=-1+\sqrt{5}$
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $-1+\sqrt{5}$이다.
답 $-1+\sqrt{5}$

0631 $\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5$, $2x^2+2x-4=0$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

㉢에서 $x=-2$일 때 $y=-1$, $x=1$일 때 $y=2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$ 답 ②

0632 $\begin{cases} x+y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x-3$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+3x(-x-3)+(-x-3)^2=5$, $-x^2-3x+4=0$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

㉢에서 $x=-4$일 때 $y=1$, $x=1$일 때 $y=-4$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=17$ 답 **17**

0633 $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=a \end{cases}$의 해가 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+by=1 \end{cases}$의 해가 되므로 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 만족시킨다.

······ ㉮

㉠에서 $y=x-2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10$, $2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=-1$일 때 $y=-3$, $x=3$일 때 $y=1$

······ ㉯

이때 $a=x+y>0$이므로 $x=3$, $y=1$ $\therefore a=3+1=4$

또, $x+by=1$에서 $3+b=1$ $\therefore b=-2$

$\therefore a+b=2$

······ ㉰

답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	연립방정식의 공통인 해가 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$을 만족시킴을 알기	30 %
㉯	연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$의 해 구하기	40 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	30 %

0634 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x\times x+2x^2=4$, $x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x\times(-x)+2(-x)^2=4$, $x^2=1$ $\therefore x=\pm1$

$\therefore x=1$, $y=-1$ 또는 $x=-1$, $y=1$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta$의 최댓값 M은 $2\sqrt{2}$, 최솟값 m은 $-2\sqrt{2}$이므로

$M-m=4\sqrt{2}$ 답 $\mathbf{4\sqrt{2}}$

0635 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+y^2=40$, $y^2=20$ $\therefore y=\pm2\sqrt{5}$

$\therefore x=-2\sqrt{5}$, $y=2\sqrt{5}$ 또는 $x=2\sqrt{5}$, $y=-2\sqrt{5}$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+y^2=40$, $y^2=4$ $\therefore y=\pm2$

$\therefore x=6$, $y=2$ 또는 $x=-6$, $y=-2$

x, y가 정수이므로 (i), (ii)에서

$x=6$, $y=2$ 또는 $x=-6$, $y=-2$

$\therefore xy=12$ 답 **12**

0636 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2\times y\times y-3y^2=20$

이때 $0=20$이므로 이를 만족시키는 x, y의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2\times2y\times y-3y^2=20$, $y^2=4$ $\therefore y=\pm2$

$\therefore x=4$, $y=2$ 또는 $x=-4$, $y=-2$

(i), (ii)에서

$\alpha=4$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=-4$, $\beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=20$ 답 **20**

0637 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x+2y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $x=-2y$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times 2x=12,\ x^2=4 \qquad \therefore x=\pm 2$

$\therefore x=2,\ y=4$ 또는 $x=-2,\ y=-4$

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+(-2y)\times y=12,\ y^2=6 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=-2\sqrt{6},\ y=\sqrt{6}$ 또는 $x=2\sqrt{6},\ y=-\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 xy의 최솟값은 -12이다. 답 ③

0638 $\begin{cases} x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=13$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2+12=13,\ (x+y)^2=1$

$\therefore x+y=\pm 1$

(i) $x+y=1,\ xy=-6$일 때

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore x=-2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=-2$

(ii) $x+y=-1,\ xy=-6$일 때

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

$\therefore x=-3,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=-3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

따라서 x^3-y^3의 최댓값 M은 35, 최솟값 m은 -35이므로

$M-m=70$ 답 70

0639 $\begin{cases} xy+x+y=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y+xy=-5 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u+v=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=-u-5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(-u-5)=7,\ u^2+u-2=0$

$(u+2)(u-1)=0 \qquad \therefore u=-2$ 또는 $u=1$

㉢에서 $u=-2$일 때 $v=-3$, $u=1$일 때 $v=-6$

(i) $u=-2,\ v=-3$, 즉 $x+y=-2,\ xy=-3$일 때

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-3,\ y=1$ 또는 $x=1,\ y=-3$

(ii) $u=1,\ v=-6$, 즉 $x+y=1,\ xy=-6$일 때

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore x=-2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=-2$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 $|\alpha-\beta|$의 최댓값은 5이다. 답 5

0640 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} xy=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=25$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-24=25,\ (x+y)^2=49$

$\therefore x+y=\pm 7$

이때 b는 자연수이므로 $b=x+y=7$

즉, $x+y=7,\ xy=12$일 때, $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-4)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=4$

따라서 두 연립방정식의 공통인 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

$x=3,\ y=4$를 $ax-y=1$에 대입하면

$a=\dfrac{5}{3}$

$x=4,\ y=3$을 $ax-y=1$에 대입하면

$a=1$

이때 a는 자연수이므로 $a=1$

$\therefore a+b=8$ 답 8

0641 $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+a$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+a)^2=18,\ 2x^2-2ax+a^2-18=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2(a^2-18)=0$

$a^2=36 \qquad \therefore a=\pm 6$

따라서 양수 a의 값은 6이다. 답 6

0642 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-2(a-3)t+a^2+4=0$의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 앞의 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a^2+4)\geq 0$$

$$-6a+5\geq 0 \qquad \therefore a\leq \frac{5}{6}$$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{5}{6}$이다. **답** $\mathbf{\frac{5}{6}}$

0643 $\begin{cases} 2x-y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x-2y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-k$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x-2(2x-k)=0$, $x^2-2x+2k=0$

·· ㉮

주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 위의 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2k<0$$

$$1-2k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{2}$$

·· ㉯

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

·· ㉰

답 **1**

단계	채점요소	배점
㉮	x에 대한 이차방정식 세우기	30 %
㉯	k의 값의 범위 구하기	50 %
㉰	정수 k의 최솟값 구하기	20 %

0644 두 이차방정식의 공통인 근이 α이므로

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+3\alpha+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면 $(k-3)\alpha+3-k=0$

$(k-3)(\alpha-1)=0 \qquad \therefore k=3$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=3$일 때, 두 이차방정식은 일치하므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=1$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$1+k+3=0 \qquad \therefore k=-4$

(i), (ii)에서 $k+\alpha=-4+1=-3$ **답** ②

0645 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+(m+2)\alpha-4=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(m+4)\alpha-6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면 $-2\alpha+2=0 \qquad \therefore \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+m+2-4=0 \qquad \therefore m=1$ **답** $\boldsymbol{m=1}$**, 공통인 근: 1**

0646 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+2k+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-\alpha-k^2-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면

$(k+1)\alpha+k^2+3k+2=0$

$(k+1)\alpha+(k+1)(k+2)=0$

$(k+1)(\alpha+k+2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $\alpha=-k-2$

(i) $k=-1$일 때, 두 이차방정식은 일치하므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

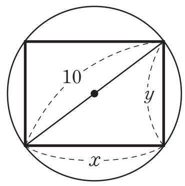
(ii) $\alpha=-k-2$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$(-k-2)^2+k(-k-2)+2k+2=0$

$4k+6=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{3}{2}$ **답** ①

0647 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면



$$\begin{cases} 2(x+y)=28 \\ x^2+y^2=10^2 \end{cases},$$

즉 $\begin{cases} x+y=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=14-x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$, $2x^2-28x+96=0$

$x^2-14x+48=0$, $(x-6)(x-8)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=8$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=6$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=6$

따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 8이다. **답** ⑤

0648 처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y $(x>y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서

$11(x+y)=121$, $x+y=11$

$\therefore y=11-x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+(11-x)^2=73$

$2x^2-22x+48=0$, $x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0 \qquad \therefore x=3$ 또는 $x=8$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=3$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=3$

그런데 $x>y$이므로 $x=8$, $y=3$

따라서 처음 수는 83이다. **답** **83**

0649 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

$$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=20\pi \end{cases},\ \text{즉} \begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ r_1^2+r_2^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

…… ㉮

㉠에서 $r_2=6-r_1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $r_1^2+(6-r_1)^2=20$

$2r_1^2-12r_1+16=0$, $r_1^2-6r_1+8=0$

$(r_1-2)(r_1-4)=0$ $\quad\therefore r_1=2$ 또는 $r_1=4$

이것을 ㉢에 대입하면

$r_1=2$, $r_2=4$ 또는 $r_1=4$, $r_2=2$

…… ㉯

따라서 두 원의 반지름의 길이의 차는

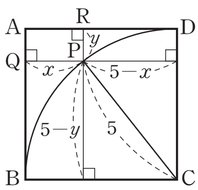
$|r_1-r_2|=2$

…… ㉰

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	두 원의 반지름의 길이 r_1, r_2에 대한 연립방정식 세우기	40 %
㉯	r_1, r_2의 값 구하기	40 %
㉰	두 원의 반지름의 길이의 차 구하기	20 %

0650 선분 PQ의 길이를 x, 선분 PR의 길이를 y라 하면



$$\begin{cases} 2(x+y)=8 \\ (5-x)^2+(5-y)^2=5^2 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-10(x+y)+25=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+y^2-40+25=0$, $x^2+y^2=15$

이때 $(x+y)^2-2xy=15$에서

$16-2xy=15$ $\quad\therefore xy=\dfrac{1}{2}$

따라서 직사각형 AQPR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 $\dfrac{1}{2}$

유형 up

본문 92~93쪽

0651 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$\therefore \frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\omega^2}$$
$$=-1+(-1)=-2$$

답 -2

0652 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$ $\quad\therefore x^3=1$

즉, $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{101}+\omega^{100}+\omega^{99}+\omega^{98}+\omega^{97}$

$=(\omega^3)^{33}\times\omega^2+(\omega^3)^{33}\times\omega+(\omega^3)^{33}+(\omega^3)^{32}\times\omega^2+(\omega^3)^{32}\times\omega$

$=(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega)$

$=0+(-1)=-1$

답 ②

0653 $x^3=-1$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega^6+\omega^5-\omega^4+\omega^3-\omega^2+\omega-1$

$=(\omega^3)^2+\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega+\omega^3-\omega^2+\omega-1$

$=1-\omega^2+\omega-1-\omega^2+\omega-1$

$=1-2(\omega^2-\omega+1)=1-2\times0=1$

따라서 $a=1$, $b=0$이므로

$a+b=1+0=1$

답 ③

0654 $\omega=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega=1-\sqrt{3}i$

$2\omega-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$

$4\omega^2-4\omega+4=0$ $\quad\therefore \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$, $\omega^3+1=0$ $\quad\therefore \omega^3=-1$

$$\therefore \frac{\omega}{1+\omega}-\frac{\omega^2}{1-\omega^2}=\frac{\omega(1-\omega^2)-\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega)(1-\omega^2)}$$
$$=\frac{\omega-\omega^3-\omega^2-\omega^3}{1+\omega-\omega^2-\omega^3}$$
$$=\frac{\omega-\omega^2+2}{\omega-\omega^2+2}=1$$

답 ③

0655 ㄱ. $x^3=-1$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

ㄴ. ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega\overline{\omega}=1$

ㄷ. $\omega^5-\omega^4-1=\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega-1=-\omega^2+\omega-1$

$=-(\omega^2-\omega+1)=0$

ㄹ. $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$

ㅁ. $\omega^{2019}+\dfrac{1}{\omega^{2019}}=(\omega^3)^{673}+\dfrac{1}{(\omega^3)^{673}}=-1+(-1)=-2$

ㅂ. $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\cdots-\omega^{99}$

$=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)+\cdots$

$+\omega^{96}(1-\omega+\omega^2)-\omega^{99}$

$=-\omega^{99}=-(\omega^3)^{33}=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0656 $x^3+1=0$에서
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
ω가 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \frac{(2\omega-3)\overline{(2\omega-3)}}{(\omega+1)\overline{(\omega+1)}}=\frac{(2\omega-3)(2\overline{\omega}-3)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}$$
$$=\frac{4\omega\overline{\omega}-6(\omega+\overline{\omega})+9}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{4-6+9}{1+1+1}=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

0657 $x^3=1$에서
$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
$f(n)=\omega^{2n+1}$이므로
$f(1)=\omega^3=1$, $f(2)=\omega^5=\omega^3\times\omega^2=\omega^2$,
$f(3)=\omega^7=(\omega^3)^2\times\omega=\omega$, $f(4)=\omega^9=(\omega^3)^3=1$,
$f(5)=\omega^{11}=(\omega^3)^3\times\omega^2=\omega^2$, $f(6)=\omega^{13}=(\omega^3)^4\times\omega=\omega$,
$f(7)=\omega^{15}=(\omega^3)^5=1$, $f(8)=\omega^{17}=(\omega^3)^5\times\omega^2=\omega^2$,
$f(9)=\omega^{19}=(\omega^3)^6\times\omega=\omega$, $f(10)=\omega^{21}=(\omega^3)^7=1$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+1$
$=1$

답 **1**

0658 $2xy-4x-3y-4=0$에서
$2x(y-2)-3(y-2)-10=0$
$\therefore (2x-3)(y-2)=10$
이때 x, y는 자연수이므로

$2x-3$	1	2	5	10
$y-2$	10	5	2	1

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$
따라서 $x+y$의 최댓값은 14이다.

답 ③

0659 $x^2+xy+x+2y=5$에서
$(x+2)y+(x^2+x-2)+2=5$
$(x+2)y+(x+2)(x-1)=3$
$\therefore (x+2)(x+y-1)=3$
이때 x, y는 정수이므로

$x+2$	-3	-1	1	3
$x+y-1$	-1	-3	3	1

$\therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
따라서 xy의 최댓값은 1이다.

답 **1**

0660 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$
$4x+4y=xy$, $xy-4x-4y=0$
$x(y-4)-4(y-4)-16=0$
$\therefore (x-4)(y-4)=16$
이때 x, y는 양의 정수이므로

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1

따라서 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(5, 20)$, $(6, 12)$, $(8, 8)$, $(12, 6)$, $(20, 5)$
의 5개이다.

답 ⑤

0661 이차방정식 $x^2-(m+2)x+2m+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=m+2$ ······ ㉠
$\alpha\beta=2m+2$ ······ ㉡
㉡$-$㉠$\times 2$를 하면
$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=-2$, $\alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=-2$
$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)=2$
이때 α, β가 양의 정수이므로

$\alpha-2$	1	2
$\beta-2$	2	1

$\therefore \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=3 \end{cases}$
㉠에서 $7=m+2$ $\quad\therefore m=5$

답 **5**

0662 $9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$에서
$(9x^2+6xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0$
$(3x+y)^2+(y-2)^2=0$
이때 x, y가 실수이므로
$3x+y=0$, $y-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{2}{3}$, $y=2$
$\therefore x-y=-\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3}$

답 ①

다른풀이 $9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$ ······ ㉠
x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(3y)^2-9(2y^2-4y+4)\geq 0$
$-9y^2+36y-36\geq 0$, $y^2-4y+4\leq 0$, $(y-2)^2\leq 0$
이때 y는 실수이므로
$y-2=0$ $\quad\therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면
$9x^2+12x+4=0$, $(3x+2)^2=0$ $\quad\therefore x=-\frac{2}{3}$
$\therefore x-y=-\frac{8}{3}$

0663 $(x^2+y^2-20)^2+(x-y-2)^2=0$에서 x, y가 실수이므로

$x^2+y^2-20=0$, $x-y-2=0$

$\therefore x^2+y^2=20$, $x-y=2$

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$에서

$2^2=20-2xy$, $2xy=16$

$\therefore xy=8$ 답 8

참고 $x=y+2$를 $x^2+y^2-20=0$에 대입하여 x, y의 값을 구할 수도 있다.

0664 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$에서

$x^2-2(2y-1)x+(5y^2-8y+5)=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-8y+5)\geq 0$

$-y^2+4y-4\geq 0$, $y^2-4y+4\leq 0$, $(y-2)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로

$y-2=0$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

$\therefore x+y=5$ 답 5

시험에 꼭 나오는 문제

본문 94~97쪽

0665 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	2	5	4
		-1	-1	-4
	1	1	4	0

$f(x)=(x+1)(x^2+x+4)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2+x+4)=0$

이때 주어진 방정식의 허근은 $x^2+x+4=0$의 근이므로 구하는 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다.

답 ②

0666 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$로 놓으면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	2	1	-2	-2
		1	3	4	2
-1	1	3	4	2	0
		-1	-2	-2	
	1	2	2	0	

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)=0$

이때 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\times2\times(-2)=4$ 답 4

0667 $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=21$에서

$\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}-21=0$

$(x^2-x-6)(x^2-x-2)-21=0$

$x^2-x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t-6)(t-2)-21=0$

$t^2-8t-9=0$, $(t+1)(t-9)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=9$

(i) $t=-1$, 즉 $x^2-x=-1$일 때

$x^2-x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=9$, 즉 $x^2-x=9$일 때

$x^2-x-9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times(-9)=37>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 이차방정식 $x^2-x-9=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -9이다. 답 ②

0668 $x^4-7x^2+9=0$에서

$(x^4-6x^2+9)-x^2=0$, $(x^2-3)^2-x^2=0$

$(x^2+x-3)(x^2-x-3)=0$

$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2-x-3=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 모든 양수인 근의 합은

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\frac{2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$ 답 ①

0669 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$ $\therefore t=-1$

즉, $x+\frac{1}{x}=-1$이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-1$ 답 ③

0670 $f(x)=x^4+ax^3-x^2+ax+b$로 놓으면 주어진 방정식의 두 근이 -2, 1이므로

$f(-2)=16-8a-4-2a+b=0$,

$f(1)=1+a-1+a+b=0$

즉, $-10a+b=-12$, $2a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$f(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
 & & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline
-2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -2 & 0 & -2 & \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$

즉, $(x-1)(x+2)(x^2+1)=0$에서 주어진 사차방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+1=0$의 근이다.

따라서 구하는 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

답 ③

0671 $f(x)=x^4-x^3+ax+b$로 놓으면 주어진 방정식의 두 근이 1, -2이므로

$f(1)=1-1+a+b=0$,

$f(-2)=16-(-8)-2a+b=0$

즉, $a+b=0$, $2a-b=24$

두 식을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-8$

$f(x)=x^4-x^3+8x-8$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & 0 & 8 & -8 \\
 & & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline
-2 & 1 & 0 & 0 & 8 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -2 & 4 & -8 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$

즉, $(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$에서 주어진 사차방정식의 나머지 두 근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{aligned}\therefore |\alpha^4+\beta^4| &= |(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2| \\ &= |\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2| \\ &= |(2^2-2\times4)^2-2\times4^2| \\ &= |-16|=16\end{aligned}$$

답 **16**

0672 $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$f(x)=x^3-(a-4)x^2-4(a-1)x-4a$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & -a+4 & -4a+4 & -4a \\
 & & -2 & 2a-4 & 4a \\ \hline
 & 1 & -a+2 & -2a & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)\{x^2-(a-2)x-2a\} \\ &=(x+2)^2(x-a)\end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-2$ 또는 $x=a$

두 방정식이 공통인 근을 가지려면

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+2=-1$

답 **-1**

0673 $f(x)=x^3+x^2+3(a-2)x-6a$로 놓으면

$f(2)=8+4+6a-12-6a=0$

ㄱ. $x=2$는 $x^3+x^2+3(a-2)x-6a=0$의 근이므로 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 1 & 3a-6 & -6a \\
 & & 2 & 6 & 6a \\ \hline
 & 1 & 3 & 3a & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+3a)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 $x^2+3x+3a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9-12a<0 \quad \therefore a>\frac{3}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+3x+3a=0$이 $x=2$를 근으로 갖는 경우

$4+6+3a=0 \quad \therefore a=-\frac{10}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+3x+3a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9-12a=0 \quad \therefore a=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 중근을 갖도록 하는 실수 a는 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0674 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=-2$에서

$\alpha+\beta+2=-\gamma$, $\beta+\gamma+2=-\alpha$, $\gamma+\alpha+2=-\beta$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha+\beta+2)(\beta+\gamma+2)(\gamma+\alpha+2) &=(-\gamma)\times(-\alpha)\times(-\beta) \\ &=-\alpha\beta\gamma \\ &=-1\end{aligned}$$

답 ③

0675 삼차방정식 $x^3+3x^2+ax-6=0$의 세 근 중 두 근은 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 세 근을 $-\alpha$, α, β로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha+\alpha+\beta=-3 \quad \therefore \beta=-3$

따라서 $x^3+3x^2+ax-6=0$의 한 근이 -3이므로 $x=-3$을 대입하면

$-27+27-3a-6=0 \quad \therefore a=-2$

답 ②

0676 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=2$에서

$f(\alpha)-2=f(\beta)-2=f(\gamma)-2=0$이므로

삼차방정식 $f(x)-2=0$의 세 근이 α, β, γ이다.

즉, $f(x)-2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+2$

$\quad =x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma+2$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 세 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta\gamma-2=5-2=3$

답 3

0677 계수가 유리수이므로 $\sqrt{2}-1$이 근이면 $-\sqrt{2}-1$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)+\alpha=-a$에서

$-2+\alpha=-a$ ...... ㉠

$(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)\alpha+\alpha(\sqrt{2}-1)=b$에서

$-1-2\alpha=b$ ...... ㉡

$(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)\alpha=-1$에서 $-\alpha=-1 \quad \therefore \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=-2$

답 ③

0678 계수가 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=a+1$에서 $1+\alpha=a$ ...... ㉠

$(1+i)(1-i)\alpha=a$에서 $2\alpha=a$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $1+\alpha=2\alpha \quad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근은 $1+i$, 1이므로 구하는 두 근의 합은

$(1+i)+1=2+i$

답 ⑤

0679 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$, $\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$

$3x^3-8x^2-2x+12=0$, $(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이므로 부피는

$2^3=8\ (\text{cm}^3)$

답 8 cm³

0680 $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=1-2x$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$3x^2-(1-2x)^2=2$, $-x^2+4x-3=0$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=1$일 때 $y=-1$, $x=3$일 때 $y=-5$

따라서 xy의 최솟값은 -15이다.

답 -15

0681 $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times 2x+(2x)^2=7$, $x^2=1 \quad \therefore x=\pm1$

$\therefore x=1$, $y=2$ 또는 $x=-1$, $y=-2$

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times(-x)+(-x)^2=7$, $x^2=7 \quad \therefore x=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=\sqrt{7}$, $y=-\sqrt{7}$ 또는 $x=-\sqrt{7}$, $y=\sqrt{7}$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 3이다.

답 ②

0682 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+(x+y)=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v+u=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2-2(u^2-1)+u=2$, $-u^2+u=0$

$u^2-u=0$, $u(u-1)=0 \quad \therefore u=0$ 또는 $u=1$

㉢에서 $u=0$일 때 $v=-1$, $u=1$일 때 $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-1$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-1$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

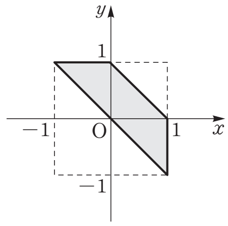
$t(t-1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

따라서 네 점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0683 $\begin{cases} 2x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=k-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$, $5x^2-4kx+k^2-5=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 위의 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$-k^2+25=0$, $k^2=25$ $\quad\therefore k=\pm5$

따라서 양수 k의 값은 5이다.

답 5

0684 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+b\alpha+a=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha+b-a=0$, $(a-b)(\alpha-1)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $\alpha=1$

이때 $a\neq b$이므로 $\alpha=1$

㉠의 나머지 한 근을 p, ㉡의 나머지 한 근을 q라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1\times p=b$, $1\times q=a$ $\quad\therefore b=p,\ a=q$

한편, $\alpha=1$이므로 ㉠에 대입하면 $1+a+b=0$

$p+q+1=0$ $\quad\therefore p+q=-1$

또한, $pq=-6$이므로

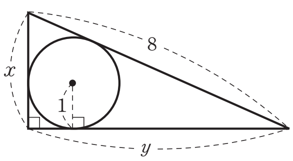
$a^2+b^2=p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$

$=(-1)^2-2\times(-6)=13$

답 ④

0685 직각삼각형의 빗변의 길이는 외접원의 지름의 길이와 같으므로 빗변의 길이는 8이다.

오른쪽 그림과 같이 나머지 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면 피타고라스 정리에 의하여



$x^2+y^2=8^2$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

직각삼각형의 넓이에서

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}(x+y+8)\times1$

$\therefore xy=x+y+8$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

㉠에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=64$

$\therefore u^2-2v=64$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $v=u+8$ $\quad\cdots\cdots ㉣$

㉣을 ㉢에 대입하면

$u^2-2(u+8)=64$, $u^2-2u-80=0$

$(u+8)(u-10)=0$ $\quad\therefore u=10\ (\because u>0)$

따라서 $u=10$, $v=18$, 즉 $x+y=10$, $xy=18$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-10t+18=0$의 두 근이므로

$t=5\pm\sqrt{7}$

따라서 가장 짧은 변의 길이는 $5-\sqrt{7}$이다.

답 $5-\sqrt{7}$

0686 $x^3=-1$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore (1-\omega)(1+\omega^2)(1-\omega^3)(1+\omega^4)(1-\omega^5)(1+\omega^6)$

$=(1-\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1-\omega)(1+\omega^2)(1+1)$

$=4(-\omega^2)\omega(-\omega^2)\omega$

$=4\omega^6=4(\omega^3)^2=4$

답 4

0687 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ㄱ. $\omega^{10}=(\omega^3)^3\times\omega=\omega$

ㄴ. $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

$\therefore \frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\frac{-1-\omega}{1+\omega}+\frac{-1-\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}^2}$

$=-1+(-1)=-2$

ㄷ. $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\cdots+\omega^{200}$

$=1+\omega^2+\omega^3\times\omega+(\omega^3)^2+(\omega^3)^2\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega$

$+\cdots+(\omega^3)^{66}+(\omega^3)^{66}\times\omega^2$

$=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+\cdots+1+\omega^2$

$=1+\omega^2=-\omega$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0688 이차방정식 $x^2-mx+m+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\alpha\beta=m+5$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉡−㉠을 하면 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=5$에서

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1=5$ $\quad\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=6$

이때 α, β가 음의 정수이므로

$\alpha-1$	-3	-2
$\beta-1$	-2	-3

$\therefore \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-2 \end{cases}$

㉠에서 $m=\alpha+\beta=-3$ 답 -3

0689 $f(x)=x^4-15x^2+ax+b$로 놓으면 주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로

$f(-1)=1-15-a+b=0$, $f(2)=16-60+2a+b=0$

㉮

즉, $a-b=-14$, $2a+b=44$

두 식을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=24$

㉯

$f(x)=x^4-15x^2+10x+24$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -15 & 10 & 24 \\ & & -1 & 1 & 14 & -24 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -14 & 24 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & -24 & \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-12)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$

즉, $(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)=0$에서 나머지 두 근은 3, -4이므로

$\alpha=3$, $\beta=-4$ ($\because \alpha>\beta$)

㉰

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=-\dfrac{3}{4}$

㉱

답 $-\dfrac{3}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	두 근이 -1, 2임을 이용하여 식 세우기	30 %
㉯	a, b의 값 구하기	20 %
㉰	α, β의 값 구하기	40 %
㉱	$\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값 구하기	10 %

0690 $f(x)=x^3+(a+1)x^2-a$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 0 & -a \\ & & -1 & -a & a \\ \hline & 1 & a & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+ax-a)$

㉮

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+ax-a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖는 경우

$1-a-a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

㉯

(ii) 방정식 $x^2+ax-a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4a=0$, $a(a+4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$

㉰

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{1}{2}+0+(-4)=-\dfrac{7}{2}$

㉱

답 $-\dfrac{7}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하기	30 %
㉯	$x^2+ax-a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때, a의 값 구하기	30 %
㉰	$x^2+ax-a=0$이 중근을 가질 때, a의 값 구하기	30 %
㉱	모든 실수 a의 값의 합 구하기	10 %

0691 삼차방정식 $x^3+x^2-5x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=3$

㉮

이때 $\alpha\beta\gamma=3$에서

$\alpha\beta=\dfrac{3}{\gamma}$, $\beta\gamma=\dfrac{3}{\alpha}$, $\gamma\alpha=\dfrac{3}{\beta}$

$\therefore \dfrac{\gamma}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}=\dfrac{\gamma^2}{3}+\dfrac{\alpha^2}{3}+\dfrac{\beta^2}{3}$

$=\dfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$=\dfrac{1}{3}\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

㉯

$=\dfrac{1}{3}\{(-1)^2-2\times(-5)\}$

$=\dfrac{11}{3}$

㉰

답 $\dfrac{11}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	삼차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기	30 %
㉯	주어진 식을 변형하여 나타내기	40 %
㉰	식의 값 구하기	30 %

0692 $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=54 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(x-2y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $x=2y$

····· ㉮

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-2x)^2=54,\ x^2=6 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=\sqrt{6},\ y=-2\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6},\ y=2\sqrt{6}$

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2y^2=54,\ y^2=9 \qquad \therefore y=\pm 3$

$\therefore x=6,\ y=3$ 또는 $x=-6,\ y=-3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$

····· ㉯

따라서 xy의 최댓값은 18이다.

····· ㉰

답 18

단계	채점요소	배점
㉮	한 이차방정식의 좌변을 인수분해하여 x, y의 관계식 구하기	30 %
㉯	연립방정식의 해 구하기	50 %
㉰	xy의 최댓값 구하기	20 %

0693 원과 접선의 성질에 의하여

$\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$

이때 $\overline{PC}=\overline{PB}+\overline{BC}=(x^2-x+4)+2x=x^2+x+4$이므로

$(2\sqrt{6}x)^2=(x^2-x+4)(x^2+x+4)$

$24x^2=x^4+7x^2+16,\ x^4-17x^2+16=0$

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-17t+16=0,\ (t-1)(t-16)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=16$

즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=16$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm4$

이때 $\overline{PB}>0,\ \overline{BC}>0,\ \overline{PA}>0$이므로 $x>0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=4$이므로 모든 x의 값의 합은

$1+4=5$

답 5

0694 계수가 실수이므로 두 허근은 켤레근이다.

$\therefore \overline{\alpha}=\alpha^2$

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)로 놓으면 $\overline{\alpha}=\alpha^2$에서

$a-bi=(a+bi)^2,\ a-bi=a^2-b^2+2abi$

즉, $a=a^2-b^2,\ -b=2ab$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 두 허근은 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이다.

나머지 한 실근을 γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\gamma=-p$에서

$-1+\gamma=-p \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\gamma$

$+\gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=q$에서

$1-\gamma=q \qquad \cdots\cdots ㉡$

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\gamma=-2$에서

$\gamma=-2$

$\gamma=-2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$p=3,\ q=3$

$\therefore p+q=6$

답 6

0695 $x^2-x+1=0$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라 하면

$\omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$, 즉 $x^3+1=0$이므로

$\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3=-1$

$f(x^9)=x^{18}-x^9+1$을 $f(x)=x^2-x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{18}-x^9+1=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면

$\omega^{18}-\omega^9+1=(\omega^2-\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$

$(\omega^3)^6-(\omega^3)^3+1=a\omega+b$

$\therefore 3=a\omega+b \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=\overline{\omega}$를 대입하면

$\overline{\omega}^{18}-\overline{\omega}^9+1=(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)Q(\overline{\omega})+a\overline{\omega}+b$

$(\overline{\omega}^3)^6-(\overline{\omega}^3)^3+1=a\overline{\omega}+b$

$\therefore 3=a\overline{\omega}+b \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡$-$㉢을 하면

$a\omega-a\overline{\omega}=0,\ a(\omega-\overline{\omega})=0 \qquad \therefore a=0\ (\because \omega\neq\overline{\omega})$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

답 ③

08 연립일차부등식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 99쪽

0696 답 $1<x<8$

0697 답 $-4\le x<3$

0698 답 $x>2$

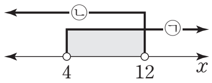
0699 답 $x<-7$

0700 $x-3>1$에서 $x>4$ …… ㉠

$2x-8<x+4$에서 $x<12$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<x<12$



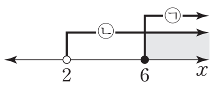
답 $4<x<12$

0701 $x+5\ge11$에서 $x\ge6$ …… ㉠

$3x-2>-x+6$에서 $4x>8$ $\therefore x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge6$



답 $x\ge6$

0702 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x+4}{2}\le-1$의 양변에 6을 곱하면

$2x-3(x+4)\le-6,\ 2x-3x-12\le-6$

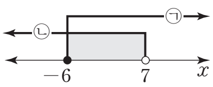
$\therefore x\ge-6$ …… ㉠

$\dfrac{2x+1}{5}<3$의 양변에 5를 곱하면

$2x+1<15,\ 2x<14$ $\therefore x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x<7$



답 $-6\le x<7$

0703 $0.1x+0.2<0.5$의 양변에 10을 곱하면

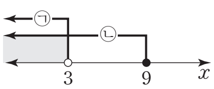
$x+2<5$ $\therefore x<3$ …… ㉠

$0.4x\le0.3(x+3)$의 양변에 10을 곱하면

$4x\le3(x+3),\ 4x\le3x+9$ $\therefore x\le9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<3$



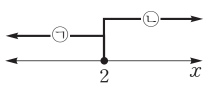
답 $x<3$

0704 $-x+1\ge-1$에서 $x\le2$ …… ㉠

$4x-7\ge3-x$에서 $x\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=2$



답 $x=2$

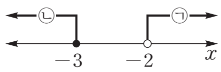
0705 $3(x+4)>2(1-x)$에서 $3x+12>2-2x$

$5x>-10$ $\therefore x>-2$ …… ㉠

$0.1x\le-0.3$의 양변에 10을 곱하면 $x\le-3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로

주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0706 (1) $2x+5<4x-7$에서

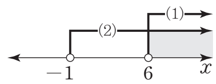
$-2x<-12$ $\therefore x>6$

(2) $4x-7<9x-2$에서

$-5x<5$ $\therefore x>-1$

(3) (1), (2)의 공통부분을 구하면

$x>6$



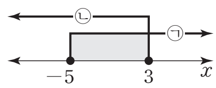
답 (1) $x>6$ (2) $x>-1$ (3) $x>6$

0707 $-3\le x+2$에서 $x\ge-5$ …… ㉠

$x+2\le17-4x$에서 $5x\le15$ $\therefore x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x\le3$



답 $-5\le x\le3$

0708 $x-2<3x-4$에서

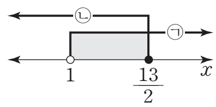
$-2x<-2$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$3x-4\le x+9$에서

$2x\le13$ $\therefore x\le\dfrac{13}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x\le\dfrac{13}{2}$



답 $1<x\le\dfrac{13}{2}$

0709 $|6-x|<3$에서 $-3<6-x<3$

$-9<-x<-3$ $\therefore 3<x<9$

답 $3<x<9$

0710 $|3x-2|\ge5$에서 $3x-2\le-5$ 또는 $3x-2\ge5$

$3x\le-3$ 또는 $3x\ge7$ $\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge\dfrac{7}{3}$

답 $x\le-1$ 또는 $x\ge\dfrac{7}{3}$

0711 (i) $x\ge1$일 때

$2(x-1)<x,\ 2x-2<x$ $\therefore x<2$

그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<2$

(ii) $x<1$일 때

$-2(x-1)<x,\ -2x+2<x$ $\therefore x>\dfrac{2}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\dfrac{2}{3}<x<1$

(i), (ii)에서 $\dfrac{2}{3}<x<2$

답 $\dfrac{2}{3}<x<2$

0712 $|x+1|+|x-5|\le 8$ ······ ㉠

(1) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-5<0$이므로

주어진 부등식 ㉠은 $-(x+1)-(x-5)\le 8$

$-x-1-x+5\le 8$ $\quad\therefore x\ge -2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2\le x<-1$

(2) $-1\le x<5$일 때, $x+1\ge 0$, $x-5<0$이므로

주어진 부등식 ㉠은 $x+1-(x-5)\le 8$

$\therefore 6\le 8$

따라서 x는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<5$이므로 $-1\le x<5$

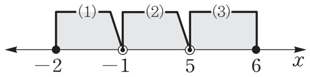
(3) $x\ge 5$일 때, $x+1>0$, $x-5\ge 0$이므로

주어진 부등식 ㉠은

$x+1+x-5\le 8$ $\quad\therefore x\le 6$

그런데 $x\ge 5$이므로 $5\le x\le 6$

(4)



(5) (1), (2), (3)에서 $-2\le x\le 6$

답 (1) $-2\le x<-1$ (2) $-1\le x<5$ (3) $5\le x\le 6$
(4) 풀이 참조 (5) $-2\le x\le 6$

유형 익/히/기

본문 100~104쪽

0713 $3x+2\le 2(x-1)$에서

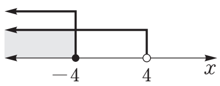
$3x+2\le 2x-2$ $\quad\therefore x\le -4$

$x+1>3(x-3)+2$에서

$x+1>3x-9+2$ $\quad\therefore x<4$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le -4$



답 $x\le -4$

0714 $6(x-1)<x+4$에서

$6x-6<x+4$ $\quad\therefore x<2$

$5-3(x+3)\le 2x+11$에서

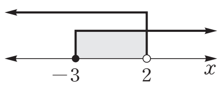
$5-3x-9\le 2x+11$ $\quad\therefore x\ge -3$

따라서 연립부등식의 해는 $-3\le x<2$

이므로

$a=-3$, $b=2$

$\therefore b-a=2-(-3)=5$



답 5

0715 $\dfrac{x+1}{2}\ge\dfrac{3x-4}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$5x+5\ge 6x-8$ $\quad\therefore x\le 13$

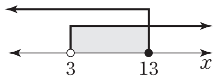
$\dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{x+1}{4}<\dfrac{x-3}{2}$의 양변에 12를 곱하면

$4(2x-3)-3(x+1)<6(x-3)$

$8x-12-3x-3<6x-18$ $\quad\therefore x>3$

따라서 연립부등식의 해는 $3<x\le 13$이므로 $M=13$, $m=4$

$\therefore M-m=9$



답 9

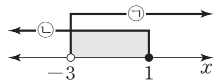
0716 $\begin{cases}2(x-5)<5x-1 & \cdots\cdots ㉠\\ 5x-1\le 4(2-x) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $2x-10<5x-1$ $\quad\therefore x>-3$

㉡에서 $5x-1\le 8-4x$ $\quad\therefore x\le 1$

따라서 연립부등식의 해는 $-3<x\le 1$이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$



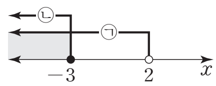
답 -2

0717 $\begin{cases}8x-5<2x+7 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+7\le -(3x+8) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x<2$

㉡에서 $2x+7\le -3x-8$ $\quad\therefore x\le -3$

따라서 연립부등식의 해는 $x\le -3$이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.



답 ⑤

0718 $\begin{cases}0.3x-1<0.5x+\dfrac{2}{5} & \cdots\cdots ㉠\\ 0.5x+\dfrac{2}{5}\le 3+0.3x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$3x-10<5x+4$ $\quad\therefore x>-7$

㉡의 양변에 10을 곱하면

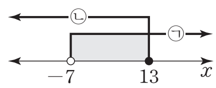
$5x+4\le 30+3x$ $\quad\therefore x\le 13$

따라서 연립부등식의 해는 $-7<x\le 13$

이므로

$a=-7$, $b=13$

$\therefore a-b=-20$



답 -20

0719 $\begin{cases}1-\dfrac{2(1-x)}{3}<\dfrac{3x+5}{4} & \cdots\cdots ㉠\\ \dfrac{3x+5}{4}\le\dfrac{x-1}{2}+1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 양변에 12를 곱하면

$12-8(1-x)<3(3x+5)$

$12-8+8x<9x+15$ $\quad\therefore x>-11$

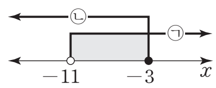
㉡의 양변에 4를 곱하면

$3x+5\le 2(x-1)+4$

$3x+5\le 2x-2+4$ $\quad\therefore x\le -3$

따라서 연립부등식의 해는

$-11<x\le -3$



이때 $3\le -x<11$이므로

$6\le -x+3<14$ $\quad\therefore 6\le A<14$

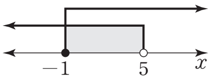
답 $6\le A<14$

0720 ① $4x-1\geq 2(x-2)+1$에서

$4x-1\geq 2x-4+1 \qquad \therefore x\geq -1$

$x+4>2x-1$에서 $x<5$

따라서 연립부등식의 해는 $-1\leq x<5$



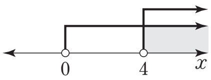
② $4(3-x)<x-8$에서

$12-4x<x-8 \qquad \therefore x>4$

$2(x-6)<3(x-4)$에서

$2x-12<3x-12 \qquad \therefore x>0$

따라서 연립부등식의 해는 $x>4$

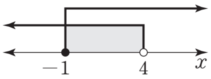


③ $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\geq 0$의 양변에 6을 곱하면

$3x-3-2x+4\geq 0 \qquad \therefore x\geq -1$

$7x-5<2x+15$에서 $x<4$

따라서 연립부등식의 해는 $-1\leq x<4$



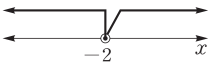
④ $5x+13>-3(x+1)$에서

$5x+13>-3x-3 \qquad \therefore x>-2$

$\dfrac{2x+4}{3}\leq \dfrac{x-2}{2}-x$의 양변에 6을 곱하면

$4x+8\leq 3x-6-6x \qquad \therefore x\leq -2$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



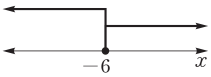
⑤ $0.5x-0.2\geq 0.4x-0.8$의 양변에 10을 곱하면

$5x-2\geq 4x-8 \qquad \therefore x\geq -6$

$4(x-2)\leq 3x-14$에서

$4x-8\leq 3x-14 \qquad \therefore x\leq -6$

따라서 연립부등식의 해는 $x=-6$



따라서 해가 없는 것은 ④이다.

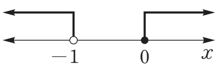
답 ④

0721 $2x+5<x+4$에서 $x<-1$

$\dfrac{1}{3}(x-6)\geq -2$의 양변에 3을 곱하면

$x-6\geq -6 \qquad \therefore x\geq 0$

따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 ②와 같다.



답 ②

0722 $\dfrac{x+2}{3}\leq \dfrac{2x+3}{5}$의 양변에 15를 곱하면

$5x+10\leq 6x+9 \qquad \therefore x\geq 1$

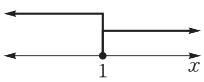
.... ㉮

$\dfrac{3(1-x)}{2}\geq -x+1$의 양변에 2를 곱하면

$3-3x\geq -2x+2 \qquad \therefore x\leq 1$

.... ㉯

따라서 연립부등식의 해는 $x=1$



.... ㉰

답 $x=1$

단계	채점요소	배점
㉮	$\dfrac{x+2}{3}\leq \dfrac{2x+3}{5}$의 해 구하기	40%
㉯	$\dfrac{3(1-x)}{2}\geq -x+1$의 해 구하기	40%
㉰	연립부등식의 해 구하기	20%

0723 $5x-a>2(x-1)$에서

$5x-a>2x-2 \qquad \therefore x>\dfrac{a-2}{3}$

$3x\leq 1+b+x$에서 $x\leq \dfrac{1+b}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $2<x\leq 4$이므로

$\dfrac{a-2}{3}=2,\ \dfrac{1+b}{2}=4$

따라서 $a=8,\ b=7$이므로

$a+b=15$

답 **15**

0724 $3x-5\leq 13$에서 $x\leq 6$

$-x+1>3x+a$에서 $x<\dfrac{1-a}{4}$

이때 수직선 위에 나타낸 연립부등식의 해가 $x<-2$이므로

$\dfrac{1-a}{4}=-2 \qquad \therefore a=9$

답 **9**

0725 $\begin{cases} x+a\leq 2x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3\leq -(x+b) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x\geq a+3$

㉡에서 $2x-3\leq -x-b \qquad \therefore x\leq \dfrac{3-b}{3}$

주어진 연립부등식의 해가 $4\leq x\leq 6$이므로

$a+3=4,\ \dfrac{3-b}{3}=6 \qquad \therefore a=1,\ b=-15$

$\therefore a-b=1-(-15)=16$

답 **16**

0726 $\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{2}\leq \dfrac{x}{3}+a$의 양변에 6을 곱하면

$5x-3\leq 2x+6a \qquad \therefore x\leq 2a+1$

$x+2\leq 5(2x-b)$에서

$x+2\leq 10x-5b \qquad \therefore x\geq \dfrac{5b+2}{9}$

주어진 연립부등식의 해가 $x=3$이므로

$2a+1=3,\ \dfrac{5b+2}{9}=3$

따라서 $a=1,\ b=5$이므로 $a+b=6$

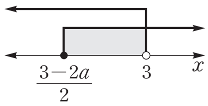
답 **6**

0727 $\dfrac{3-2x}{2}\leq a$의 양변에 2를 곱하면

$3-2x\leq 2a \qquad \therefore x\geq \dfrac{3-2a}{2}$

$3x+6>5x$에서 $x<3$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{3-2a}{2}<3$ $\quad\therefore a>-\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

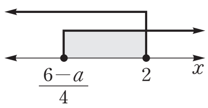
답 -1

0728 $\begin{cases} 3x-4\le 2(3-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(3-x)\le 2x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x-4\le 6-2x$ $\quad\therefore x\le 2$

㉡에서 $6-2x\le 2x+a$ $\quad\therefore x\ge\frac{6-a}{4}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{6-a}{4}\le 2$ $\quad\therefore a\ge -2$

답 $a\ge -2$

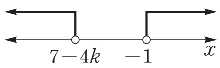
0729 $\frac{2x+5}{3}+\frac{x-3}{2}>-1$의 양변에 6을 곱하면

$4x+10+3x-9>-6$ $\quad\therefore x>-1$

$5x-7<4(x-k)$에서

$5x-7<4x-4k$ $\quad\therefore x<7-4k$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$7-4k\le -1$ $\quad\therefore k\ge 2$

답 $k\ge 2$

0730 $\frac{1}{2}x+1<3x-a$의 양변에 2를 곱하면

$x+2<6x-2a$ $\quad\therefore x>\frac{2a+2}{5}$

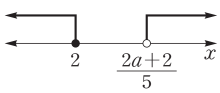
$0.2(5-2x)\ge 0.3x-0.4$의 양변에 10을 곱하면

$2(5-2x)\ge 3x-4$, $10-4x\ge 3x-4$

$\therefore x\le 2$

············ ㉮

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{2a+2}{5}\ge 2$, $2a+2\ge 10$

$\therefore a\ge 4$

············ ㉯

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

············ ㉰

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	각 일차부등식의 해 구하기	50 %
㉯	a의 값의 범위 구하기	40 %
㉰	정수 a의 최솟값 구하기	10 %

0731 더 넣어야 하는 소금의 양을 x g이라 하면

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le\frac{16}{100}\times 200+x\le\frac{25}{100}\times(200+x)$

$4000+20x\le 3200+100x\le 5000+25x$

$\therefore 10\le x\le 24$

따라서 더 넣어야 하는 소금의 양은 10 g 이상 24 g 이하이다.

답 **10 g 이상 24 g 이하**

참고 (1) (소금물의 농도)$=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100\ (\%)$

(2) (소금의 양)$=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times$(소금물의 양)

(3) 물을 더 넣거나 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다.

0732 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$119\le(x-2)+x+(x+2)<129$

$119\le 3x<129$

$\therefore \frac{119}{3}\le x<43$

이때 x는 홀수이므로 $x=41$

따라서 연속하는 세 홀수는 39, 41, 43이므로 가장 큰 홀수는 43이다.

답 43

0733 10달러짜리 지폐를 x장이라 하면 1달러짜리 지폐는 $(30-x)$장이므로

$\frac{80000}{1200}\le 10x+(30-x)\le\frac{100000}{1200}$

$800\le 108x+360\le 1000$ $\quad\therefore \frac{110}{27}\le x\le\frac{160}{27}$

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 10달러짜리 지폐는 5장이다.

답 5장

0734 섭취해야 하는 식품 B의 양을 x g이라 하면 식품 A는 $(300-x)$g 섭취해야 하므로

$\begin{cases} \frac{100}{100}(300-x)+\frac{250}{100}x\ge 400 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{12}{100}(300-x)+\frac{6}{100}x\ge 24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $30000-100x+250x\ge 40000$ $\quad\therefore x\ge\frac{200}{3}$

㉡에서 $3600-12x+6x\ge 2400$ $\quad\therefore x\le 200$

$\therefore \frac{200}{3}\le x\le 200$

따라서 섭취해야 하는 식품 B의 양은 $\frac{200}{3}$ g 이상 200 g 이하이다.

답 $\frac{200}{3}$ **g 이상 200 g 이하**

0735 $|2x-4|<6$에서 $-6<2x-4<6$

$-2<2x<10$ $\quad\therefore -1<x<5$

따라서 $a=-1$, $b=5$이므로 $b-a=6$

답 6

0736 $|5-3x|\le 7$에서 $-7\le 5-3x\le 7$

$-12\le -3x\le 2 \qquad \therefore -\dfrac{2}{3}\le x\le 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

답 ②

0737 $|2x-a|>4$에서 $2x-a<-4$ 또는 $2x-a>4$

$\therefore x<\dfrac{a}{2}-2$ 또는 $x>\dfrac{a}{2}+2$

주어진 부등식의 해가 $x<b$ 또는 $x>3$이므로

$\dfrac{a}{2}-2=b,\ \dfrac{a}{2}+2=3$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로 $a+b=1$

답 **1**

0738 $\begin{cases} 1<|x-2| & \cdots\cdots ㉠ \\ |x-2|<3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

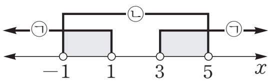
㉠에서 $x-2<-1$ 또는 $x-2>1$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

㉡에서 $-3<x-2<3 \qquad \therefore -1<x<5$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<1$ 또는 $3<x<5$



답 **$-1<x<1$ 또는 $3<x<5$**

0739 $|x-1|\le 3x-1$에서

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)\le 3x-1,\ -x+1\le 3x-1 \qquad \therefore x\ge \dfrac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $\dfrac{1}{2}\le x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때

$x-1\le 3x-1 \qquad \therefore x\ge 0$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x\ge 1$

(i), (ii)에서 $x\ge \dfrac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최솟값은 1이다.

답 ④

0740 $|3x-1|>2x+7$에서

(i) $x<\dfrac{1}{3}$일 때

$-(3x-1)>2x+7,\ -3x+1>2x+7 \qquad \therefore x<-\dfrac{6}{5}$

그런데 $x<\dfrac{1}{3}$이므로 $x<-\dfrac{6}{5}$

(ii) $x\ge \dfrac{1}{3}$일 때

$3x-1>2x+7 \qquad \therefore x>8$

그런데 $x\ge \dfrac{1}{3}$이므로 $x>8$

(i), (ii)에서 $x<-\dfrac{6}{5}$ 또는 $x>8$이므로

$a=-\dfrac{6}{5},\ b=8$

$\therefore b-5a=8-5\times\left(-\dfrac{6}{5}\right)=14$

답 ③

0741 $2|-x+1|<x+7$에서

(i) $x<1$일 때

$2(-x+1)<x+7,\ -2x+2<x+7$

$\therefore x>-\dfrac{5}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $-\dfrac{5}{3}<x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때

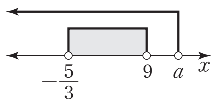
$-2(-x+1)<x+7,\ 2x-2<x+7$

$\therefore x<9$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<9$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{5}{3}<x<9$

따라서 $-\dfrac{5}{3}<x<9$가 $x<a$에 포함되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\ge 9$

답 **$a\ge 9$**

0742 $2|x-1|+3|x+1|<6$에서

(i) $x<-1$일 때

$-2(x-1)-3(x+1)<6$

$-2x+2-3x-3<6 \qquad \therefore x>-\dfrac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\dfrac{7}{5}<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$-2(x-1)+3(x+1)<6$

$-2x+2+3x+3<6 \qquad \therefore x<1$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$2(x-1)+3(x+1)<6$

$2x-2+3x+3<6 \qquad \therefore x<1$

그런데 $x\ge 1$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-\dfrac{7}{5}<x<1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은 -1이다.

답 **-1**

0743 $\sqrt{(3-x)^2}+2|x+1|<9$에서

$|3-x|+2|x+1|<9$

(i) $x<-1$일 때

$3-x-2(x+1)<9$

$3-x-2x-2<9 \qquad \therefore x>-\dfrac{8}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\dfrac{8}{3}<x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때

$3-x+2(x+1)<9$

$3-x+2x+2<9 \qquad \therefore x<4$

그런데 $-1\le x<3$이므로 $-1\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때

$-(3-x)+2(x+1)<9$

$-3+x+2x+2<9 \qquad \therefore x<\dfrac{10}{3}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x<\dfrac{10}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $-\dfrac{8}{3}<x<\dfrac{10}{3}$이므로

$a=-\dfrac{8}{3},\ b=\dfrac{10}{3}$

$\therefore b-a=\dfrac{10}{3}-\left(-\dfrac{8}{3}\right)=6$

답 ④

0744 $|2x+1|-4|x-2|>x-1$에서

(i) $x<-\dfrac{1}{2}$일 때

$-(2x+1)+4(x-2)>x-1$

$-2x-1+4x-8>x-1 \qquad \therefore x>8$

그런데 $x<-\dfrac{1}{2}$이므로 해는 없다.

㉮

(ii) $-\dfrac{1}{2}\le x<2$일 때

$2x+1+4(x-2)>x-1$

$2x+1+4x-8>x-1 \qquad \therefore x>\dfrac{6}{5}$

그런데 $-\dfrac{1}{2}\le x<2$이므로 $\dfrac{6}{5}<x<2$

㉯

(iii) $x\ge 2$일 때

$2x+1-4(x-2)>x-1$

$2x+1-4x+8>x-1 \qquad \therefore x<\dfrac{10}{3}$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<\dfrac{10}{3}$

㉰

(i), (ii), (iii)에서 $\dfrac{6}{5}<x<\dfrac{10}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3의 2개이다.

㉱

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	$x<-\dfrac{1}{2}$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
㉯	$-\dfrac{1}{2}\le x<2$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
㉰	$x\ge 2$일 때 부등식의 해 구하기	25 %
㉱	주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기	25 %

0745 $|4-|x-3||\le 5$에서

$-5\le 4-|x-3|\le 5,\ -9\le -|x-3|\le 1$

$-1\le |x-3|\le 9$

그런데 $|x-3|\ge 0$이므로 $0\le |x-3|\le 9$

$-9\le x-3\le 9 \qquad \therefore -6\le x\le 12$

따라서 $a=-6,\ b=12$이므로 $a+b=6$

답 6

다른풀이 $|4-|x-3||\le 5$에서

(i) $x<3$일 때

$|4+x-3|\le 5,\ |x+1|\le 5$

$-5\le x+1\le 5 \qquad \therefore -6\le x\le 4$

그런데 $x<3$이므로 $-6\le x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때

$|4-x+3|\le 5,\ |7-x|\le 5$

$-5\le 7-x\le 5,\ -12\le -x\le -2$

$\therefore 2\le x\le 12$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x\le 12$

(i), (ii)에서 $-6\le x\le 12$

따라서 $a=-6,\ b=12$이므로 $a+b=6$

0746 $|x-2|\le k+2$에서 $|x-2|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하려면 $k+2\ge 0$이어야 한다.

$\therefore k\ge -2$

답 ②

0747 $|x-4|\le \dfrac{3}{4}k-9$에서 $|x-4|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\dfrac{3}{4}k-9<0 \qquad \therefore k<12$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, ⋯, 11의 11개이다.

답 ④

0748 $|3x-4|+2>a$에서 $|3x-4|>a-2$

이때 $|3x-4|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되려면 $a-2<0 \qquad \therefore a<2$

답 ③

유형 up

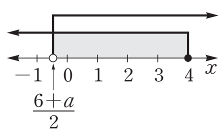
본문 105쪽

0749 $1-x\ge -3$에서 $x\le 4$

$5x-a>3(x+2)$에서

$5x-a>3x+6 \qquad \therefore x>\dfrac{6+a}{2}$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le \dfrac{6+a}{2}<0,\ -2\le 6+a<0$

$\therefore -8\le a<-6$

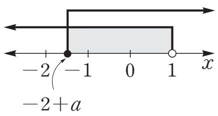
답 ③

0750 $3x+3<2(4-x)$에서

$3x+3<8-2x \qquad \therefore x<1$

$x+a\le 2x+2$에서 $x\ge -2+a$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-2<-2+a\le -1$

$\therefore 0<a\le 1$

답 $\mathbf{0<a\le 1}$

0751 $\begin{cases} 2x+a<3-\dfrac{2-x}{2} & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3-\dfrac{2-x}{2}<\dfrac{3x-1}{3} & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

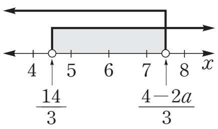
㉠의 양변에 2를 곱하면

$4x+2a<6-2+x \qquad \therefore x<\dfrac{4-2a}{3}$

㉡의 양변에 6을 곱하면

$18-6+3x<6x-2 \qquad \therefore x>\dfrac{14}{3}$

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$7<\dfrac{4-2a}{3}\le 8,\ 21<4-2a\le 24$

$\therefore -10\le a<-\dfrac{17}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 -10이다. 답 $\mathbf{-10}$

0752 $|2x+3|<5$에서

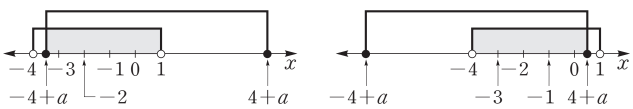
$-5<2x+3<5,\ -8<2x<2$

$\therefore -4<x<1$ ㉮

$|x-a|\le 4$에서

$-4\le x-a\le 4 \qquad \therefore -4+a\le x\le 4+a$ ㉯

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 아래 그림에서



$-4\le -4+a\le -3$ 또는 $0\le a+4\le 1$이어야 한다.

$\therefore 0\le a\le 1$ 또는 $-4\le a\le -3$

그런데 a는 자연수이므로 $a=1$ ㉰

답 **1**

단계	채점요소	배점
㉮	$\lvert 2x+3\rvert<5$의 해 구하기	30 %
㉯	$\lvert x-a\rvert\le 4$의 해 구하기	30 %
㉰	a의 값 구하기	40 %

0753 학생 수를 x라 하면 사탕은 $(4x+12)$개이다.

$7(x-1)+2\le 4x+12<7(x-1)+6$에서

$\begin{cases} 7(x-1)+2\le 4x+12 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 4x+12<7(x-1)+6 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $7x-7+2\le 4x+12 \qquad \therefore x\le\dfrac{17}{3}$

㉡에서 $4x+12<7x-7+6 \qquad \therefore x>\dfrac{13}{3}$

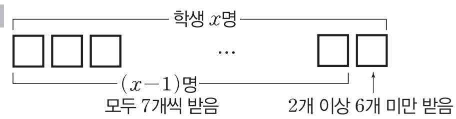
$\therefore \dfrac{13}{3}<x\le\dfrac{17}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 학생 수가 5이므로 사탕의 개수는

$4\times 5+12=32$ 답 ③

참고



0754 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(3x+5)$명이므로

$4(x-4)+1\le 3x+5\le 4(x-4)+4$에서

$\begin{cases} 4(x-4)+1\le 3x+5 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3x+5\le 4(x-4)+4 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

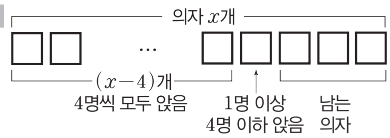
㉠에서 $4x-16+1\le 3x+5 \qquad \therefore x\le 20$

㉡에서 $3x+5\le 4x-16+4 \qquad \therefore x\ge 17$

$\therefore 17\le x\le 20$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고



0755 승용차의 수를 x라 하면 사람은 $(4x+11)$명이므로

$5(x-3)+1\le 4x+11\le 5(x-3)+5$에서

$\begin{cases} 5(x-3)+1\le 4x+11 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 4x+11\le 5(x-3)+5 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠에서 $5x-15+1\le 4x+11 \qquad \therefore x\le 25$

㉡에서 $4x+11\le 5x-15+5 \qquad \therefore x\ge 21$

$\therefore 21\le x\le 25$

따라서 승용차는 최소 21대이다. 답 ①

시험에 꼭 나오는 문제

본문 106~107쪽

0756 $x+2>4x-13$에서 $x<5$

$3(x-1)\ge 2x-3$에서

$3x-3\ge 2x-3 \qquad \therefore x\ge 0$

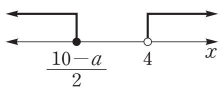
따라서 연립부등식의 해는 $0\le x<5$이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0757 $1.2x-2\le 0.8x+3.2$의 양변에 10을 곱하면
$12x-20\le 8x+32$ $\therefore x\le 13$
$3-\dfrac{x-2}{4}<\dfrac{2x-3}{2}$의 양변에 4를 곱하면
$12-x+2<4x-6$ $\therefore x>4$
따라서 연립부등식의 해는 $4<x\le 13$이므로
$a=4,\ b=13$
$\therefore a-b=-9$ 답 -9

0758 $4x+1\le 2x+a$에서 $x\le \dfrac{a-1}{2}$
$4x+1<5x-b$에서 $x>b+1$
연립부등식의 해가 $-3<x\le 3$이므로
$b+1=-3,\ \dfrac{a-1}{2}=3$
$\therefore b=-4,\ a=7$
주어진 부등식은 $4x+1\le 2x+7<5x+4$이므로
$4x+1\le 2x+7$에서 $x\le 3$
$2x+7<5x+4$에서 $x>1$
$\therefore 1<x\le 3$ 답 $1<x\le 3$

0759 $5(x-2)\le 2x-7$에서
$5x-10\le 2x-7$ $\therefore x\le 1$
$\dfrac{1}{2}x+1>\dfrac{a}{3}x-1$의 양변에 6을 곱하면
$3x+6>2ax-6,\ (3-2a)x>-12$
이때 $a<\dfrac{3}{2}$이므로 $3-2a>0$ $\therefore x>-\dfrac{12}{3-2a}$
주어진 연립부등식의 해가 $-4<x\le b$이므로
$-\dfrac{12}{3-2a}=-4,\ b=1$ $\therefore a=0$
$\therefore a+b=1$ 답 1

0760 $2x-3>x+1$에서 $x>4$
$2x+a\le 10$에서 $x\le \dfrac{10-a}{2}$
주어진 연립부등식의 해가 없으려면
오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\dfrac{10-a}{2}\le 4,\ 10-a\le 8$ $\therefore a\ge 2$ 답 $a\ge 2$

0761 6 %의 설탕물의 양을 x g이라 하면 12 %의 설탕물의 양은 $(600-x)$ g이므로
$\dfrac{8}{100}\times 600\le \dfrac{6}{100}\times x+\dfrac{12}{100}\times(600-x)\le \dfrac{10}{100}\times 600$
$4800\le -6x+7200\le 6000$ $\therefore 200\le x\le 400$
따라서 섞어야 할 6 %의 설탕물의 양은 200 g 이상 400 g 이하이다. 답 200 g 이상 400 g 이하

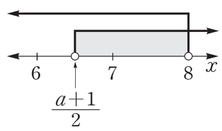
0762 $|x-a|\le 3$에서 $-3\le x-a\le 3$
$\therefore a-3\le x\le a+3$
주어진 부등식의 해가 $3\le x\le b$이므로
$a-3=3,\ a+3=b$
따라서 $a=6,\ b=9$이므로 $a+b=15$ 답 ⑤

0763 $2|x-1|+x\le 4$에서
(i) $x<1$일 때
$-2(x-1)+x\le 4,\ -2x+2+x\le 4$ $\therefore x\ge -2$
그런데 $x<1$이므로 $-2\le x<1$
(ii) $x\ge 1$일 때
$2(x-1)+x\le 4,\ 2x-2+x\le 4$ $\therefore x\le 2$
그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 2$
(i), (ii)에서 $-2\le x\le 2$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 구하는 합은 0이다. 답 ③

0764 $||x-2|-3|\le 4$에서
$-4\le |x-2|-3\le 4,\ -1\le |x-2|\le 7$
그런데 $|x-2|\ge 0$이므로 $0\le |x-2|\le 7$
$-7\le x-2\le 7$ $\therefore -5\le x\le 9$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는
$-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 8,\ 9$의 15개이다. 답 15

0765 $\left|\dfrac{3}{4}x+1\right|-a<\dfrac{1}{2}$에서 $\left|\dfrac{3}{4}x+1\right|<a+\dfrac{1}{2}$
$\left|\dfrac{3}{4}x+1\right|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면
$a+\dfrac{1}{2}\le 0$ $\therefore a\le -\dfrac{1}{2}$
따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0766 $0.3(2x+5)>0.7(x+1)$의 양변에 10을 곱하면
$3(2x+5)>7(x+1)$ $\therefore x<8$
$2x-1>a$에서 $x>\dfrac{a+1}{2}$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$6\le \dfrac{a+1}{2}<7,\ 12\le a+1<14$
$\therefore 11\le a<13$
따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

0767 텐트의 개수를 x라 하면 학생은 $(5x+2)$명이므로
$6(x-2)+1\le 5x+2\le 6(x-2)+6$에서
$$\begin{cases} 6(x-2)+1\le 5x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+2\le 6(x-2)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠에서 $6x-12+1\le 5x+2$ $\therefore x\le 13$

㉡에서 $5x+2\le 6x-12+6$ $\quad\therefore x\ge 8$

$\therefore 8\le x\le 13$

따라서 최대 학생 수는

$5\times 13+2=67$(명) 답 **67명**

0768 $4x-(3x-2)<2x$에서

$4x-3x+2<2x$ $\quad\therefore x>2$

$5x-15\le 2(x+1)$에서

$5x-15\le 2x+2$ $\quad\therefore x\le \dfrac{17}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$2<x\le \dfrac{17}{3}$

.... ㉮

즉, 정수인 해는 3, 4, 5이므로

$M=5$, $m=3$

.... ㉯

$\therefore M-m=2$

.... ㉰

답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	연립부등식의 해 구하기	50 %
㉯	M, m의 값 구하기	30 %
㉰	$M-m$의 값 구하기	20 %

0769 합금 A의 양을 x g이라 하면 합금 B의 양은 $(300-x)$g이므로

$$\begin{cases}\dfrac{25}{100}x+\dfrac{20}{100}(300-x)\ge 63 & \cdots\cdots ㉠\\[2ex] \dfrac{30}{100}x+\dfrac{35}{100}(300-x)\ge 100 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

.... ㉮

㉠의 양변에 100을 곱하면

$25x+20(300-x)\ge 6300$ $\quad\therefore x\ge 60$

㉡의 양변에 100을 곱하면

$30x+35(300-x)\ge 10000$ $\quad\therefore x\le 100$

$\therefore 60\le x\le 100$

.... ㉯

따라서 합금 A의 양은 60 g 이상 100 g 이하이다.

.... ㉰

답 **60 g 이상 100 g 이하**

단계	채점요소	배점
㉮	합금 A의 양을 x g으로 놓고 연립부등식 세우기	40 %
㉯	연립부등식 풀기	40 %
㉰	합금 A의 양의 범위 구하기	20 %

0770 $f(n,\ n+3)$에서 $|x-n|+|x|\le n+3$

(i) $x<0$일 때

$-(x-n)-x\le n+3$, $-x+n-x\le n+3$

$\therefore x\ge -\dfrac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $-\dfrac{3}{2}\le x<0$

(ii) $0\le x<n$일 때

$-(x-n)+x\le n+3$, $-x+n+x\le n+3$

$\therefore 0\le 3$

따라서 x는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $0\le x<n$

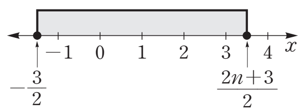
(iii) $x\ge n$일 때

$x-n+x\le n+3$ $\quad\therefore x\le \dfrac{2n+3}{2}$

그런데 $x\ge n$이므로 $n\le x\le \dfrac{2n+3}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $-\dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{2n+3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$3\le \dfrac{2n+3}{2}<4$, $6\le 2n+3<8$

$\therefore \dfrac{3}{2}\le n<\dfrac{5}{2}$

따라서 자연수 n의 값은 2이다. 답 **2**

0771 $|x-a[a]|<b[b]$에서

$-b[b]<x-a[a]<b[b]$

$\therefore -b[b]+a[a]<x<b[b]+a[a]$

주어진 부등식의 해가 $-13<x<23$이므로

$-b[b]+a[a]=-13$, $b[b]+a[a]=23$

두 식을 연립하여 풀면 $a[a]=5$, $b[b]=18$

$a=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$인 실수)라 하면

$a[a]=5$이므로 $[a]=2$ $\quad\therefore a=\dfrac{5}{[a]}=\dfrac{5}{2}$

또한 $b=m+\beta$ (m은 정수, $0\le\beta<1$인 실수)라 하면

$b[b]=18$이므로 $[b]=4$ $\quad\therefore b=\dfrac{18}{[b]}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore b-a=\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}=2$ 답 ④

09 이차부등식과 연립이차부등식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 109쪽, 111쪽

0772 (1) $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x<-2$ 또는 $x>3$
(2) $f(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-2\le x\le 3$
답 (1) $x<-2$ 또는 $x>3$ (2) $-2\le x\le 3$

0773 $ax^2+bx+c>0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$\alpha<x<\gamma$
답 $\alpha<x<\gamma$

0774 $ax^2+bx+c\le mx+n$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로
$x\le\beta$ 또는 $x\ge\delta$
답 $x\le\beta$ 또는 $x\ge\delta$

0775 $x^2-2x-15<0$에서 $(x+3)(x-5)<0$
$\therefore -3<x<5$
답 $-3<x<5$

0776 $3x^2-2x-1\le 0$에서 $(3x+1)(x-1)\le 0$
$\therefore -\frac{1}{3}\le x\le 1$
답 $-\frac{1}{3}\le x\le 1$

0777 $5x^2-9x-2>0$에서 $(5x+1)(x-2)>0$
$\therefore x<-\frac{1}{5}$ 또는 $x>2$
답 $x<-\frac{1}{5}$ 또는 $x>2$

0778 $2x^2+5x-3\ge 0$에서 $(x+3)(2x-1)\ge 0$
$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$
답 $x\le -3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

0779 $-x^2+4x-3\ge 0$에서 $x^2-4x+3\le 0$
$(x-1)(x-3)\le 0$ $\therefore 1\le x\le 3$
답 $1\le x\le 3$

0780 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge 0$
이므로 $4x^2-4x+1>0$의 해는 $x\ne\frac{1}{2}$인 모든 실수이다.
답 $x\ne\frac{1}{2}$인 모든 실수

0781 $4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0$
이므로 $4x^2-12x+9\ge 0$의 해는 모든 실수이다.
답 모든 실수

0782 $x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$
이므로 $x^2+2x+1<0$의 해는 없다.
답 해는 없다.

0783 $9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$이므로
$9x^2-6x+1\le 0$의 해는 $x=\frac{1}{3}$
답 $x=\frac{1}{3}$

0784 $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge\frac{7}{4}$
이므로 $x^2-x+2>0$의 해는 모든 실수이다.
답 모든 실수

0785 $2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3\ge 3$
이므로 $2x^2-4x+5<0$의 해는 없다.
답 해는 없다.

0786 $x^2\ge 2(x-1)$에서 $x^2-2x+2\ge 0$
$x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1$
이므로 $x^2\ge 2(x-1)$의 해는 모든 실수이다.
답 모든 실수

0787 $9x^2\le -12x-4$에서 $9x^2+12x+4\le 0$
$9x^2+12x+4=(3x+2)^2\ge 0$
이므로 $9x^2\le -12x-4$의 해는 $x=-\frac{2}{3}$이다.
답 $x=-\frac{2}{3}$

0788 $(x+2)(x-4)>0$에서 $x^2-2x-8>0$
답 $x^2-2x-8>0$

0789 $(x-1)(x-3)\ge 0$에서 $x^2-4x+3\ge 0$
답 $x^2-4x+3\ge 0$

0790 $(x+1)(x-4)<0$에서 $x^2-3x-4<0$
답 $x^2-3x-4<0$

0791 $(x+2)(x-3)\le 0$에서 $x^2-x-6\le 0$
답 $x^2-x-6\le 0$

0792 $(x-6)^2>0$에서 $x^2-12x+36>0$
답 $x^2-12x+36>0$

0793 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-8<0$, $(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})<0$
$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$
답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

0794 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+4x-k+2$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+4x-k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+(-k+2)<0$, $-k+6<0$

$\therefore k>6$ 답 $k>6$

0795 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+2kx-3k$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k\leq 0$, $k(k-3)\leq 0$

$\therefore 0\leq k\leq 3$ 답 $0\leq k\leq 3$

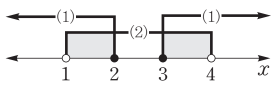
0796 (1) $x^2-5x+6\geq 0$에서 $(x-2)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$

(2) $x^2+4<5x$에서 $x^2-5x+4<0$

$(x-1)(x-4)<0$ $\therefore 1<x<4$

(3)



(4) 수직선 위에서 공통부분을 구하면

$1<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<4$

답 (1) $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$ (2) $1<x<4$ (3) 풀이 참조

(4) $1<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<4$

0797 $2x+5>x+2$에서 $x>-3$ …… ㉠

$x^2+4x-5<0$에서 $(x+5)(x-1)<0$

$\therefore -5<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<1$ 답 $-3<x<1$

0798 $2x^2-5x+2<0$에서 $(2x-1)(x-2)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<2$ …… ㉠

$4x^2+12x+9\geq 0$에서 $(2x+3)^2\geq 0$

$\therefore x$는 모든 실수 …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{2}<x<2$ 답 $\frac{1}{2}<x<2$

0799 $\begin{cases} 2x+6\leq x^2+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3<2x+11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-2x-3\geq 0$

$(x+1)(x-3)\geq 0$ $\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$ …… ㉢

㉡에서 $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2<x\leq -1$ 또는 $3\leq x<4$

답 $-2<x\leq -1$ 또는 $3\leq x<4$

0800 이차방정식 $x^2-x-2k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(-1)^2-4\times(-2k+1)\geq 0$

$8k-3\geq 0$ $\therefore k\geq\frac{3}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-(-1)>0$

(iii) $\alpha\beta=-2k+1>0$ $\therefore k<\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{3}{8}\leq k<\frac{1}{2}$ 답 $\frac{3}{8}\leq k<\frac{1}{2}$

0801 이차방정식 $x^2+(k-1)x+4=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k-1)^2-4\times 4\geq 0$

$k^2-2k-15\geq 0$, $(k+3)(k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq 5$

(ii) $\alpha+\beta=-(k-1)<0$ $\therefore k>1$

(iii) $\alpha\beta=4>0$

(i), (ii), (iii)에서 공통부분을 구하면 $k\geq 5$ 답 $k\geq 5$

0802 이차방정식 $x^2+kx+k^2-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ 답 $-2<k<2$

0803 (1) 주어진 그림에서 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\geq 0$이고 $f(-1)>0$, $a>-1$

(2) 주어진 그림에서 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가져야 하므로 $D\geq 0$이고 $f(3)>0$, $a<3$

(3) 주어진 그림에서 $f(2)<0$

답 (1) $\geq$, $>$, $>$ (2) $\geq$, $>$, $<$ (3) $<$

0804 $f(x)=x^2-2kx+2-k$로 놓으면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0$, $(k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0$ $\therefore k<1$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<1$

(i), (ii), (iii)에서 $k\leq -2$ 답 $k\leq -2$

0805 $f(x)=x^2-kx+1+5k$로 놓으면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로

$f(1)=1-k+1+5k<0$ $\quad\therefore k<-\frac{1}{2}$ 답 $k<-\frac{1}{2}$

유형 익/히/기

본문 112~120쪽

0806 $ax^2+(b-m)x+c-n\ge 0$에서

$ax^2+bx+c\ge mx+n$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서

$-2\le x\le 2$ 답 $-2\le x\le 2$

0807 $f(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서

$-1\le x\le 2$ 답 $-1\le x\le 2$

0808 $f(x)g(x)\ge 0$에서

$f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$ 또는 $f(x)\le 0,\ g(x)\le 0$

(i) $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a\le x\le b$

(ii) $f(x)\le 0,\ g(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$c\le x\le d$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)\ge 0$의 해는

$a\le x\le b$ 또는 $c\le x\le d$ 답 $a\le x\le b$ 또는 $c\le x\le d$

0809 이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 해는 $x=1\pm 2\sqrt{2}$이므로

이차부등식 $x^2-2x-7\ge 0$의 해는

$x\le 1-2\sqrt{2}$ 또는 $x\ge 1+2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$이므로

$\beta-\alpha=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

0810 $-2x^2+7x+6\ge 2x+3$에서 $2x^2-5x-3\le 0$

$(2x+1)(x-3)\le 0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\le x\le 3$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 4

0811 ① $x^2-6x+9=(x-3)^2\ge 0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다.

② $4x^2+4x+1=(2x+1)^2\ge 0$

따라서 $4x^2+4x+1\le 0$의 해는 $x=-\frac{1}{2}$이다.

③ $9x^2\ge 6x-1$에서 $9x^2-6x+1\ge 0$

$9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $12x-9>4x^2$에서 $4x^2-12x+9<0$

$4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

⑤ $x^2+2x-3\le 0$에서 $(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

0812 $x^2+6x-7\ge 0$에서 $(x+7)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -7$ 또는 $x\ge 1$

① $|x+3|\le 4$에서 $-4\le x+3\le 4$

$\therefore -7\le x\le 1$

② $|x+3|\ge 4$에서 $x+3\le -4$ 또는 $x+3\ge 4$

$\therefore x\le -7$ 또는 $x\ge 1$

③ $|x-3|\ge 2$에서 $x-3\le -2$ 또는 $x-3\ge 2$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 5$

④ $|x-3|\le 3$에서 $-3\le x-3\le 3$

$\therefore 0\le x\le 6$

⑤ $|x+2|\le 5$에서 $-5\le x+2\le 5$

$\therefore -7\le x\le 3$

따라서 $x^2+6x-7\ge 0$과 해가 같은 것은 ②이다. 답 ②

0813 $x^2-x-5\le |2x-1|$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때

$x^2-x-5\le -(2x-1)$, $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -3\le x\le 2$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $-3\le x<\frac{1}{2}$

(ii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때

$x^2-x-5\le 2x-1$, $x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 4$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\le x\le 4$

(i), (ii)에서 $-3\le x\le 4$

따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$의 8개이다.

답 ④

0814 $x^2+2|x|-3<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$ $\quad\therefore -1<x<3$

그런데 $x<0$이므로 $-1<x<0$

(ii) $x \geq 0$일 때

$x^2+2x-3<0$, $(x+3)(x-1)<0$ $\quad\therefore -3<x<1$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<1$

.... ㉯

(i), (ii)에서 $-1<x<1$

.... ㉰

답 $-1<x<1$

단계	채점요소	배점
㉮	$x<0$일 때, 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	40%
㉯	$x\geq 0$일 때, 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	40%
㉰	부등식의 해 구하기	20%

0815 $|x^2-5x|<6$에서 $-6<x^2-5x<6$

(i) $-6<x^2-5x$에서 $x^2-5x+6>0$

$(x-2)(x-3)>0$ $\quad\therefore x<2$ 또는 $x>3$

(ii) $x^2-5x<6$에서 $x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$ $\quad\therefore -1<x<6$

(i), (ii)에서 $-1<x<2$ 또는 $3<x<6$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0816 이차부등식 $ax^2+bx+10>0$의 해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$이므로 $a>0$

해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x+1)>0$, 즉 $x^2+6x+5>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2+6ax+5a>0$ ($\because a>0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+10>0$과 같으므로

$6a=b$, $5a=10$ $\quad\therefore a=2, b=12$

$\therefore b-a=10$ 답 10

다른풀이 이차방정식 $ax^2+bx+10=0$의 두 근이 -5, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=-6$, $\frac{10}{a}=5$ $\quad\therefore a=2, b=12$

$\therefore b-a=10$

0817 해가 $x=-3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)^2\leq 0$, 즉 $x^2+6x+9\leq 0$

이 부등식이 $x^2-2kx-3k\leq 0$과 같으므로

$-2k=6$, $-3k=9$

$\therefore k=-3$ 답 -3

0818 이차부등식 $ax^2+bx+3a-1\geq 0$의 해가 $3-\sqrt{3}\leq x\leq 3+\sqrt{3}$이므로 $a<0$

해가 $3-\sqrt{3}\leq x\leq 3+\sqrt{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3+\sqrt{3})(x-3-\sqrt{3})\leq 0$, 즉 $x^2-6x+6\leq 0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-6ax+6a\geq 0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+3a-1\geq 0$과 같으므로

$-6a=b$, $6a=3a-1$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=2$이므로 $ab=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

0819 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{7}<x<\frac{1}{2}$이므로 $a<0$

해가 $\frac{1}{7}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$, 즉 $x^2-\frac{9}{14}x+\frac{1}{14}<0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{9}{14}ax+\frac{1}{14}a>0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\frac{9}{14}a$, $c=\frac{1}{14}a$

이것을 $4cx^2+2bx+a>0$에 대입하면

$4\times\frac{1}{14}ax^2+2\times\left(-\frac{9}{14}a\right)x+a>0$

양변을 a로 나누면 $\frac{2}{7}x^2-\frac{9}{7}x+1<0$ ($\because a<0$)

$2x^2-9x+7<0$, $(2x-7)(x-1)<0$

$\therefore 1<x<\frac{7}{2}$

따라서 정수 x는 2, 3이므로 구하는 합은 5이다. 답 5

0820 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면

$f(-x)=a(-x+3)(-x-2)=a(x-3)(x+2)$

따라서 $f(-x)\geq 0$, 즉 $a(x-3)(x+2)\geq 0$에서

$(x-3)(x+2)\leq 0$ ($\because a<0$)

$\therefore -2\leq x\leq 3$ 답 $-2\leq x\leq 3$

다른풀이 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$f(x)\geq 0$의 해는 $-3\leq x\leq 2$

$f(-x)\geq 0$의 해는 $-3\leq -x\leq 2$ $\quad\therefore -2\leq x\leq 3$

0821 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a>0)$로 놓으면

$f(2x+1)=a(2x+1+1)(2x+1-2)=2a(x+1)(2x-1)$

따라서 $f(2x+1)\leq 0$, 즉 $2a(x+1)(2x-1)\leq 0$에서

$(x+1)(2x-1)\leq 0$ ($\because a>0$) $\quad\therefore -1\leq x\leq\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

다른풀이 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$f(2x+1)\leq 0$의 해는 $-1\leq 2x+1\leq 2$에서 $-1\leq x\leq\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$

0822 $f(x)\ge 0$의 해가 $-2\le x\le 2$이므로
$f(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면
$f(2019-x)=a(2019-x+2)(2019-x-2)$
$=a(x-2021)(x-2017)$
따라서 $f(2019-x)<0$, 즉 $a(x-2021)(x-2017)<0$에서
$(x-2021)(x-2017)>0$ $(\because a<0)$
$\therefore x<2017$ 또는 $x>2021$
따라서 해가 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

다른풀이 $f(x)\ge 0$의 해가 $-2\le x\le 2$이므로
$f(x)<0$의 해는 $x<-2$ 또는 $x>2$
$f(2019-x)<0$의 해는
$2019-x<-2$ 또는 $2019-x>2$
$\therefore x>2021$ 또는 $x<2017$

0823 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$로 놓으면
$f(x)\le 0$의 해가 $1\le x\le 5$이므로
$f(x-5)=a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$의 해는
$1<x-5<5$ $\quad\therefore 6<x<10$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8+9=24$ 답 **24**

다른풀이 $ax^2+bx+c\le 0$의 해가 $1\le x\le 5$이므로
$ax^2+bx+c=a(x-1)(x-5)$ $(a>0)$라 하면
$a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$에서
$a\{(x-5)-1\}\{(x-5)-5\}<0$
$a(x-6)(x-10)<0$ $\quad\therefore 6<x<10$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8+9=24$

0824 이차부등식 $2x^2-(k+3)x+2k\le 0$의 해가 단 한 개뿐이므로 이차방정식 $2x^2-(k+3)x+2k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k+3)^2-16k=0$
$k^2-10k+9=0$, $(k-1)(k-9)=0$
$\therefore k=1$ 또는 $k=9$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $1+9=10$ 답 **10**

0825 이차부등식 $(k+1)x^2-2(k+1)x-5\ge 0$이 단 하나의 해를 가지므로
$k+1<0$에서 $k<-1$
이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k+1)^2+5(k+1)=0$
$(k+6)(k+1)=0$ $\quad\therefore k=-6$ 또는 $k=-1$
그런데 $k<-1$이므로 $k=-6$ 답 **-6**

0826 이차부등식 $2x^2+6x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+6x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9+2a>0$ $\quad\therefore a>-\frac{9}{2}$
따라서 정수 a의 최솟값은 -4이다. 답 ②

0827 $ax^2+4ax-8>0$에서
(i) $a>0$일 때
이차함수 $y=ax^2+4ax-8$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ii) $a=0$일 때
(좌변)$=-8<0$이므로 부등식의 해는 없다.
(iii) $a<0$일 때
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4ax-8=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2a)^2+8a>0$
$4a^2+8a>0$, $4a(a+2)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>0$
그런데 $a<0$이므로 $a<-2$
(i), (ii), (iii)에서 $a<-2$ 또는 $a>0$
따라서 해를 갖도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은 ②이다.
답 ②

0828 이차부등식 $ax^2+6x\le 8-a$, 즉 $ax^2+6x+a-8\le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a<0$
이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-a(a-8)\le 0$
$a^2-8a-9\ge 0$, $(a+1)(a-9)\ge 0$
$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 9$
그런데 $a<0$이므로 $a\le -1$
따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 **-1**

0829 이차부등식 $3x^2-2(k+1)x+k+1>0$의 해가 모든 실수이므로 이차방정식 $3x^2-2(k+1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3(k+1)<0$
$(k+1)(k-2)<0$ $\quad\therefore -1<k<2$
따라서 정수 k는 0, 1의 2개이다. 답 ①

0830 이차부등식 $ax^2-2(a+2)x+2a+1<0$의 해가 모든 실수가 되려면 $a<0$
이차방정식 $ax^2-2(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+2)^2-a(2a+1)<0$, $a^2-3a-4>0$
$(a+1)(a-4)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>4$
그런데 $a<0$이므로 $a<-1$ 답 **$a<-1$**

0831 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2+2x+k}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2+2x+k\geq 0$이 성립해야 한다.

(i) $k=0$일 때

$2x\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립하지는 않는다.

(ii) $k\neq 0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $kx^2+2x+k\geq 0$이 성립하려면

$k>0$

이차방정식 $kx^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k^2\leq 0$

$k^2-1\geq 0$, $(k+1)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 1$

그런데 $k>0$이므로 $k\geq 1$

(i), (ii)에서 $k\geq 1$이므로 실수 k의 최솟값은 1이다. 답 **1**

0832 이차부등식 $x^2+2(n+1)x-4(n+1)<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2(n+1)x-4(n+1)\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2(n+1)x-4(n+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(n+1)^2+4(n+1)\leq 0$

$(n+1)(n+5)\leq 0$ $\quad\therefore -5\leq n\leq -1$

따라서 정수 n은 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다. 답 **5**

0833 이차부등식 $ax^2+2x>ax+2$, 즉

$ax^2+(2-a)x-2>0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+(2-a)x-2\leq 0$이 성립해야 하므로 $a<0$

이차방정식 $ax^2+(2-a)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2+8a\leq 0$, $a^2+4a+4\leq 0$

$(a+2)^2\leq 0$ $\quad\therefore a=-2$ 답 ②

0834 부등식 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4\leq 0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4>0$이 성립해야 한다.

(i) $k-2=0$, 즉 $k=2$일 때

(좌변)$=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

……………………………………………………………… ㉮

(ii) $k-2\neq 0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4>0$이 성립하려면 $k-2>0$, 즉 $k>2$

이차방정식 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-4(k-2)<0$

$(k-2)(k-6)<0$ $\quad\therefore 2<k<6$

그런데 $k>2$이므로 $2<k<6$

……………………………………………………………… ㉯

(i), (ii)에서 $2\leq k<6$

……………………………………………………………… ㉰

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

……………………………………………………………… ㉱

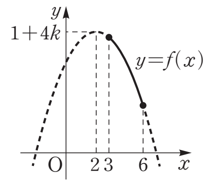
답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	$k=2$일 때, 부등식이 항상 성립함을 보이기	30 %
㉯	$k\neq 2$일 때, 부등식이 항상 성립하도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
㉰	부등식이 해를 갖지 않도록 하는 k의 값의 범위 구하기	20 %
㉱	k의 최솟값 구하기	10 %

0835 $f(x)=-x^2+4x-3+4k$로 놓으면

$f(x)=-(x-2)^2+1+4k$

$3\leq x\leq 6$에서 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(6)\geq 0$이어야 한다.



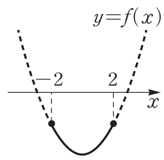
$f(6)=-16+1+4k\geq 0$

$\therefore k\geq \frac{15}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 ③

0836 $f(x)=3x^2+ax-2a^2$으로 놓자.

$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(-2)<0$, $f(2)<0$이어야 한다.



$f(-2)=12-2a-2a^2<0$에서

$a^2+a-6>0$, $(a+3)(a-2)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>2$ …… ㉠

$f(2)=12+2a-2a^2<0$에서

$a^2-a-6>0$, $(a+2)(a-3)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

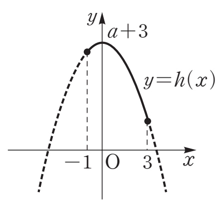
$a<-3$ 또는 $a>3$ 답 $a<-3$ **또는** $a>3$

0837 부등식 $f(x)\leq g(x)$에서 $g(x)-f(x)\geq 0$

$h(x)=g(x)-f(x)$로 놓으면

$h(x)=(-x^2+3x+a+1)-(x^2+3x-2)=-2x^2+a+3$

$-1\leq x\leq 3$에서 $h(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $h(3)\geq 0$이어야 한다.



$h(3)=a-15\geq 0$

$\therefore a\geq 15$

따라서 실수 a의 최솟값은 15이다. 답 **15**

0838 이차함수 $y=x^2-ax+5$의 그래프가 직선 $y=x-3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$x^2-ax+5>x-3$, 즉 $x^2-(a+1)x+8>0$ …… ㉠

의 해이다.
해가 $x<2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-b)>0 \quad \therefore x^2-(2+b)x+2b>0$ ...... ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로
$a+1=2+b$, $8=2b$
따라서 $a=5$, $b=4$이므로 $a+b=9$ 답 **9**

0839 이차함수 $y=x^2-2x-8$의 그래프가 이차함수 $y=-2x^2+x-2$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 $x^2-2x-8<-2x^2+x-2$의 해이다. 즉,
$3x^2-3x-6<0$, $x^2-x-2<0$
$(x+1)(x-2)<0 \quad \therefore -1<x<2$ 답 ②

0840 이차함수 $y=-x^2+px+3$의 그래프가 직선 $y=a$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는
$-x^2+px+3>a$, 즉 $x^2-px+(a-3)<0$ ...... ㉠
의 해이다.
해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-1)(x-3)<0 \quad \therefore x^2-4x+3<0$ ...... ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로 $p=4$, $a-3=3$에서 $a=6$
$\therefore a-p=2$ 답 **2**

0841 이차함수 $y=-x^2+4x-6$의 그래프가 직선 $y=a(x-2)+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면
$-x^2+4x-6<a(x-2)+1$에서 $x^2+(a-4)x-2a+7>0$
이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(a-4)x-2a+7=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-4)^2-4(-2a+7)<0$, $a^2-12<0$
$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0 \quad \therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$
따라서 $\alpha=-2\sqrt{3}$, $\beta=2\sqrt{3}$이므로
$\alpha\beta=-12$ 답 ②

0842 이차함수 $y=x^2+(k+1)x+3$의 그래프가 직선 $y=x-1$보다 항상 위쪽에 있으려면
$x^2+(k+1)x+3>x-1$에서 $x^2+kx+4>0$
.... ㉮
이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-16<0$, $(k+4)(k-4)<0 \quad \therefore -4<k<4$
.... ㉯
따라서 정수 k는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.
.... ㉰
답 **7**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 조건을 만족시키는 이차부등식 세우기	30 %
㉯	k의 값의 범위 구하기	50 %
㉰	정수 k의 개수 구하기	20 %

0843 이차함수 $y=kx^2+5x+2k-6$의 그래프가 직선 $y=-3x+k$보다 항상 아래쪽에 있으려면
$kx^2+5x+2k-6<-3x+k$에서
$kx^2+8x+k-6<0$
이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
$k<0$
이차방정식 $kx^2+8x+k-6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4^2-k(k-6)<0$
$k^2-6k-16>0$, $(k+2)(k-8)>0$
$\therefore k<-2$ 또는 $k>8$
그런데 $k<0$이므로 $k<-2$ 답 ①

0844 새로운 텃밭의 넓이가 현재 텃밭의 넓이의 3배 이상이 되려면
$(4+x)(8+x)\ge 3\times4\times8$
$x^2+12x-64\ge0$, $(x+16)(x-4)\ge0$
이때 $x>0$이어야 하므로 $x\ge4$
따라서 x의 최솟값은 4이다. 답 **4**

0845 t초 후에 공의 높이 h m가 35 m 이상이 되려면
$-5t^2+25t+15\ge35$, $t^2-5t+4\le0$
$(t-1)(t-4)\le0 \quad \therefore 1\le t\le4$
따라서 공의 높이가 35 m 이상인 시간은 $4-1=3$(초) 동안이다. 답 ③

0846 할인하는 금액을 $100x$원이라 하면 커피의 하루 판매 총액은 $(3800-100x)(400+50x)\ge2600000$이어야 한다.
$-5000x^2+150000x-1080000\ge0$
$x^2-30x+216\le0$, $(x-12)(x-18)\le0$
$\therefore 12\le x\le18$
따라서 할인할 수 있는 금액은 $1200\le100x\le1800$이고, 할인된 커피 한 잔의 가격은 $2000\le3800-100x\le2600$이므로 커피 한 잔의 최소 가격은 2000원이다. 답 **2000원**

0847 $3x^2-8x-16<0$에서 $(3x+4)(x-4)<0$
$\therefore -\frac{4}{3}<x<4$ ...... ㉠
$2x^2-7x+6\ge0$에서 $(2x-3)(x-2)\ge0$
$\therefore x\le\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge2$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-\frac{4}{3}<x\le\frac{3}{2}$ 또는 $2\le x<4$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 **5**

0848 $\begin{cases} 5x+1\le 2x^2+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+3<2x+27 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x^2-5x+2\ge 0$

$(2x-1)(x-2)\ge 0 \qquad \therefore x\le \frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉢

㉡에서 $2x^2-2x-24<0$, $x^2-x-12<0$

$(x+3)(x-4)<0 \qquad \therefore -3<x<4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-3<x\le \frac{1}{2}$ 또는 $2\le x<4$ 답 ④

0849 $x^2\le 4x$에서 $x^2-4x\le 0$

$x(x-4)\le 0 \qquad \therefore 0\le x\le 4$ …… ㉠

$x^2+x\ge 6$에서 $x^2+x-6\ge 0$

$(x+3)(x-2)\ge 0 \qquad \therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x\le 4$

이때 $ax^2+2bx-(a+3b)\ge 0$의 해가 $2\le x\le 4$이므로 $a<0$

해가 $2\le x\le 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-4)\le 0$, 즉 $x^2-6x+8\le 0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-6ax+8a\ge 0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+2bx-(a+3b)\ge 0$과 같으므로

$-6a=2b$, $8a=-(a+3b)$

$\therefore \frac{b}{a}=-3$ 답 -3

다른풀이 이차부등식 $ax^2+2bx-(a+3b)\ge 0$의 해가 $2\le x\le 4$이므로 이차방정식 $ax^2+2bx-(a+3b)=0$의 해가 $x=2$ 또는 $x=4$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2b}{a}=6 \qquad \therefore \frac{b}{a}=-3$

0850 $|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore -1<x<5$ …… ㉠

$x^2-3x>0$에서 $x(x-3)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<0$ 또는 $3<x<5$

따라서 해가 될 수 있는 것은 ①이다. 답 ①

0851 $|x+4|\le 5$에서 $-5\le x+4\le 5$

$\therefore -9\le x\le 1$ …… ㉠

$x^2-x-2\le 0$에서 $(x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1\le x\le 1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$b-a=2$ 답 2

0852 $x^2-3|x|<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+3x<0$, $x(x+3)<0 \qquad \therefore -3<x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때

$x^2-3x<0$, $x(x-3)<0 \qquad \therefore 0<x<3$

(i), (ii)에서 $-3<x<0$ 또는 $0<x<3$ …… ㉠

또, $x^2-x<6$에서 $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<0$ 또는 $0<x<3$

따라서 정수 x는 -1, 1, 2이므로 구하는 합은

$-1+1+2=2$ 답 2

0853 $|x^2-4|<3x$에서

(i) $x^2-4<0$, 즉 $-2<x<2$일 때

$-(x^2-4)<3x$, $x^2+3x-4>0$

$(x+4)(x-1)>0 \qquad \therefore x<-4$ 또는 $x>1$

그런데 $-2<x<2$이므로 $1<x<2$

(ii) $x^2-4\ge 0$, 즉 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$일 때

$x^2-4<3x$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0 \qquad \therefore -1<x<4$

그런데 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$이므로 $2\le x<4$

(i), (ii)에서 $1<x<4$ …… ㉠

…… ㉮

또, $2x^2-3x-5<0$에서 $(x+1)(2x-5)<0$

$\therefore -1<x<\frac{5}{2}$ …… ㉡

…… ㉯

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<x<\frac{5}{2}$

따라서 정수 x는 2의 1개이다.

…… ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	$\lvert x^2-4\rvert<3x$ 풀기	50 %
㉯	$2x^2-3x-5<0$ 풀기	30 %
㉰	연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기	20 %

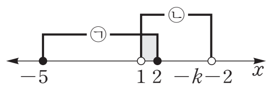
0854 $x^2+3x-10\le 0$에서 $(x+5)(x-2)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 2$ …… ㉠

$x^2+(k+1)x-k-2<0$에서

$(x-1)(x+k+2)<0$ …… ㉡

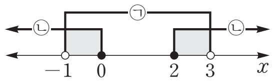
㉠, ㉡의 공통부분이 $1<x\le 2$이기 위해서는 오른쪽 그림에서



$-k-2>2$이어야 하므로

$k<-4$ 답 $k<-4$

0855 $\begin{cases} x^2-2x-a<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$



㉠, ㉡의 공통부분이
$-1<x\le 0$ 또는 $2\le x<3$이기
위해서는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$x^2-2x-a<0$은 해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식이므로

$(x+1)(x-3)<0$, $x^2-2x-3<0$ $\therefore a=3$

또, $x^2-2x+b\ge 0$은 해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식이므로

$x(x-2)\ge 0$, $x^2-2x\ge 0$ $\therefore b=0$

$\therefore a+b=3$ 답 **3**

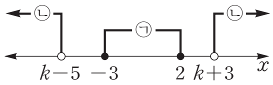
0856 $(x+1)^2\le x+7$에서 $x^2+x-6\le 0$

$(x+3)(x-2)\le 0$ $\therefore -3\le x\le 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-2(k-1)x+(k+3)(k-5)>0$에서

$\{x-(k+3)\}\{x-(k-5)\}>0$

$\therefore x<k-5$ 또는 $x>k+3$ $\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면
오른쪽 그림에서

$k-5\le -3$, $2\le k+3$

$\therefore -1\le k\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-1$이므로

$M-m=3$ 답 **3**

0857 삼각형의 세 변의 길이는 모두 양수이므로

$n-5>0$, $n>0$, $n+5>0$ $\therefore n>5$ $\cdots\cdots$ ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $n+5$이고, 삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 다른 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$n+5<n+(n-5)$ $\therefore n>10$ $\cdots\cdots$ ㉡

둔각삼각형이기 위해서는 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 다른 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(n+5)^2>n^2+(n-5)^2$, $n^2-20n<0$

$n(n-20)<0$ $\therefore 0<n<20$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $10<n<20$

따라서 자연수 n은 11, 12, $\cdots$, 19의 9개이다. 답 **9**

0858 새로운 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 각각 $(a-2)$ cm, a cm, $(a+3)$ cm이므로

(직육면체의 부피)$=a(a-2)(a+3)=a^3+a^2-6a$ (cm^3)

(정육면체의 부피)$=a^3$ (cm^3)

$a^3+a^2-6a<a^3$, $a^2-6a<0$

$a(a-6)<0$ $\therefore 0<a<6$

그런데 $a-2>0$에서 $a>2$이므로 $2<a<6$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$3+4+5=12$ 답 **12**

0859 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+10)(2x+7)-10\times 7=4x^2+34x(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 60 m^2 이상 168 m^2 이하이어야 하므로

$60\le 4x^2+34x\le 168$ $\therefore 30\le 2x^2+17x\le 84$

$30\le 2x^2+17x$에서 $2x^2+17x-30\ge 0$

$(x+10)(2x-3)\ge 0$ $\therefore x\le -10$ 또는 $x\ge \frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge \frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2+17x\le 84$에서 $2x^2+17x-84\le 0$

$(x+12)(2x-7)\le 0$ $\therefore -12\le x\le \frac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le \frac{7}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2}\le x\le \frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로 $a+b=5$ 답 **5**

0860 이차방정식 $x^2+(k+2)x+k^2+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4(k^2+1)>0$

$3k^2-4k<0$, $k(3k-4)<0$ $\therefore 0<k<\frac{4}{3}$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0861 이차방정식 $x^2-2kx+16=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-16<0$

$(k+4)(k-4)<0$ $\therefore -4<k<4$ $\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+4kx-k+5=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2k)^2-(-k+5)>0$

$4k^2+k-5>0$, $(4k+5)(k-1)>0$

$\therefore k<-\frac{5}{4}$ 또는 $k>1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4<k<-\frac{5}{4}$ 또는 $1<k<4$

따라서 정수 k는 -3, -2, 2, 3의 4개이다. 답 **4**

0862 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+a^2-3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2-(a^2-3)=0$, $-2a+4=0$ $\therefore a=2$

$\cdots\cdots$ ㉮

이차방정식 $x^2-(b+2)x+a+b=0$, 즉

$x^2-(b+2)x+2+b=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=(b+2)^2-4(2+b)<0$

$(b+2)(b-2)<0$ $\therefore -2<b<2$

$\cdots\cdots$ ㉯

따라서 정수 b의 최댓값은 1이다.
.... ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	중근을 가질 조건 구하기	40 %
㉯	허근을 가질 조건 구하기	40 %
㉰	정수 b의 최댓값 구하기	20 %

0863 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4a\geq0,\ a^2-4a\geq0$

$a(a-4)\geq0 \qquad \therefore a\leq0$ 또는 $a\geq4$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-2x+2-a^2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-(2-a^2)\geq0,\ a^2-1\geq0$

$(a+1)(a-1)\geq0 \qquad \therefore a\leq-1$ 또는 $a\geq1$ ...... ㉡

두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가져야 하므로 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡을 합친 범위이다.

$\therefore a\leq0$ 또는 $a\geq1$

답 ①

다른풀이 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 두 방정식 모두 허근을 갖는 경우를 제외하면 된다.

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D_1=(-a)^2-4a<0,\ a^2-4a<0$

$a(a-4)<0 \qquad \therefore 0<a<4$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-2x+2-a^2=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-(2-a^2)<0,\ a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore -1<a<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<a<1$

따라서 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는

$a\leq0$ 또는 $a\geq1$

0864 이차방정식 $x^2-(a+4)x-\dfrac{a}{2}=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $D=(a+4)^2-4\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)\geq0$

$a^2+10a+16\geq0,\ (a+2)(a+8)\geq0$

$\therefore a\leq-8$ 또는 $a\geq-2$

(ii) $\alpha+\beta=a+4>0 \qquad \therefore a>-4$

(iii) $\alpha\beta=-\dfrac{a}{2}>0 \qquad \therefore a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-2\leq a<0$

답 $-2\leq a<0$

0865 이차방정식 $kx^2+3kx+5=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $D=(3k)^2-4\times k\times5\geq0$

$9k^2-20k\geq0,\ k\left(k-\dfrac{20}{9}\right)\geq0 \qquad \therefore k\leq0$ 또는 $k\geq\dfrac{20}{9}$

(ii) $\alpha+\beta=-\dfrac{3k}{k}=-3<0$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{5}{k}>0 \qquad \therefore k>0$

(i), (ii), (iii)에서 $k\geq\dfrac{20}{9}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{20}{9}$이다.

답 ②

0866 이차방정식 $-x^2+(a^2-5a+4)x-a+6=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\dfrac{-a+6}{-1}<0 \qquad \therefore a<6$ ...... ㉠

또, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{a^2-5a+4}{-1}>0,\ a^2-5a+4>0$

$(a-1)(a-4)>0 \qquad \therefore a<1$ 또는 $a>4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a<1$ 또는 $4<a<6$

답 $a<1$ 또는 $4<a<6$

유형 up

본문 121쪽

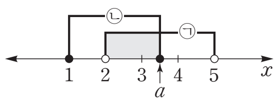
0867 $x^2-7x+10<0$에서

$(x-2)(x-5)<0 \qquad \therefore 2<x<5$ ...... ㉠

$x^2-(a+1)x+a\leq0$에서

$(x-1)(x-a)\leq0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x가 한 개, 즉 $x=3$이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3\leq a<4$

따라서 정수 a는 3이다.

답 ②

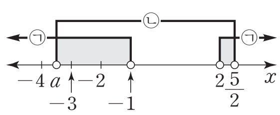
0868 $x^2-x>2$에서 $x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0 \qquad \therefore x<-1$ 또는 $x>2$ ...... ㉠

$2x^2-2ax-5x+5a<0$에서

$2x^2-(2a+5)x+5a<0,\ (2x-5)(x-a)<0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x가 -3과 -2뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-4\leq a<-3$

답 ②

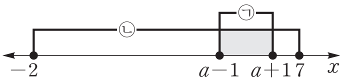
0869 $|x-a|\le 1$에서 $-1\le x-a\le 1$

$\therefore a-1\le x\le a+1$ …… ㉠

$x^2-5x-14\le 0$에서 $(x+2)(x-7)\le 0$

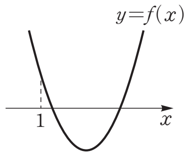
$\therefore -2\le x\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x의 값의 합이 15이려면 오른쪽 그림에서



$(a-1)+a+(a+1)=15$ $\therefore a=5$ 답 5

0870 $f(x)=x^2-2kx+4$로 놓으면 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-4\ge 0$, $(k+2)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 2$

(ii) $f(1)=1-2k+4>0$에서 $k<\frac{5}{2}$

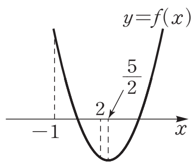
(ii) $f(x)=x^2-2kx+4=(x-k)^2+4-k^2$에서 축의 방정식은 $x=k$이므로 $k>1$

(i), (ii), (iii)에서 $2\le k<\frac{5}{2}$ 답 ⑤

0871 $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$f(x)=x^2-5x+a$로 놓으면 $f(x)=0$의 한 근만이 -1과 2 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



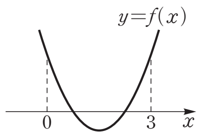
(i) $f(-1)=1+5+a>0$에서 $a>-6$

(ii) $f(2)=4-10+a<0$에서 $a<6$

(i), (ii)에서 $-6<a<6$

따라서 정수 a는 -5, -4, $\cdots$, 4, 5의 11개이다. 답 11

0872 $f(x)=x^2-2px+p+2$로 놓으면 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-p)^2-(p+2)\ge 0$

$p^2-p-2\ge 0$, $(p+1)(p-2)\ge 0$

$\therefore p\le -1$ 또는 $p\ge 2$

(ii) $f(0)=p+2>0$에서 $p>-2$

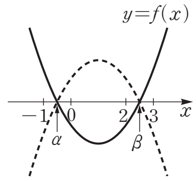
(iii) $f(3)=9-6p+p+2>0$에서 $p<\frac{11}{5}$

(iv) $f(x)=x^2-2px+p+2=(x-p)^2-p^2+p+2$에서 축의 방정식은 $x=p$이므로 $0<p<3$

(i)~(iv)에서 $2\le p<\frac{11}{5}$

따라서 실수 p의 최솟값은 2이다. 답 2

0873 $f(x)=ax^2-2x+a-2$로 놓으면 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있을 조건은 $f(-1)f(0)<0$에서

$(a+2+a-2)(a-2)<0$, $2a(a-2)<0$

$\therefore 0<a<2$ …… ㉠

㉮

$f(x)=0$의 다른 한 근이 2와 3 사이에 있을 조건은 $f(2)f(3)<0$에서

$(4a-4+a-2)(9a-6+a-2)<0$

$2(5a-6)(5a-4)<0$

$\therefore \frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$ …… ㉡

㉯

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$

㉰

답 $\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	한 근이 -1과 0 사이에 있을 조건 구하기	40 %
㉯	한 근이 2와 3 사이에 있을 조건 구하기	40 %
㉰	a의 값의 범위 구하기	20 %

시험에 꼭 나오는 문제

본문 122~125쪽

0874 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서 $1<x<7$

따라서 $a=1$, $b=7$이므로

$a+b=8$ 답 8

0875 ㄱ. $x^2-x-3=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$이므로

$x^2-x-3\le 0$의 해는 $\frac{1-\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

ㄴ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $3x^2-2x+3<0$

$3x^2-2x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄷ. $-x^2+6x-9>0$에서 $x^2-6x+9<0$

$x^2-6x+9=(x-3)^2\ge 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄹ. $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0876 $(x+1)(x-1)<|x-5|$에서

(i) $x<5$일 때

$(x+1)(x-1)<-(x-5)$, $x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$ $\quad\therefore -3<x<2$

그런데 $x<5$이므로 $-3<x<2$

(ii) $x\ge5$일 때

$(x+1)(x-1)<x-5$, $x^2-x+4<0$

그런데 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 해는 없다.

즉, $x\ge5$일 때, 주어진 부등식의 해는 없다.

(i), (ii)에서 $-3<x<2$

① $2x-1<3$, $2x<4$ $\quad\therefore x<2$

② $3x+4>-8$, $3x>-12$ $\quad\therefore x>-4$

③ $x^2-2x<0$, $x(x-2)<0$ $\quad\therefore 0<x<2$

④ $x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

⑤ $x^2+4x-12>0$, $(x+6)(x-2)>0$

$\therefore x<-6$ 또는 $x>2$

따라서 $(x+1)(x-1)<|x-5|$와 해가 같은 것은 ④이다.

답 ④

0877 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이므로 $a<0$

해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)>0$ $\quad\therefore x^2-4x-5>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-4ax-5a<0$ $(\because a<0)$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-4a$, $c=-5a$

이것을 $a(x-2)^2-b(x-2)+c>0$에 대입하면

$a(x-2)^2+4a(x-2)-5a>0$

$(x-2)^2+4(x-2)-5<0$ $(\because a<0)$

$x^2-9<0$, $(x+3)(x-3)<0$

$\therefore -3<x<3$

답 ③

0878 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)$ $(a<0)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f(1-2x)&=a(1-2x+2)(1-2x-1)\\&=a(-2x+3)(-2x)\\&=2ax(2x-3)\end{aligned}$$

이고 $f(-1)=-2a$이므로

$f(1-2x)<f(-1)$에서

$2ax(2x-3)<-2a$, $2ax(2x-3)+2a<0$

$x(2x-3)+1>0$ $(\because a<0)$, $2x^2-3x+1>0$

$(2x-1)(x-1)>0$ $\quad\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

답 ④

0879 이차부등식 $(k-2)x^2-(k+1)x+2k-2\le0$이 오직 하나의 해를 가지므로

$k-2>0$에서 $k>2$

이차방정식 $(k-2)x^2-(k+1)x+2k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4(k-2)(2k-2)=0$

$7k^2-26k+15=0$, $(k-3)(7k-5)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=\frac{5}{7}$

그런데 $k>2$이므로 $k=3$

$k=3$을 주어진 부등식에 대입하면

$x^2-4x+4\le0$, $(x-2)^2\le0$ $\quad\therefore x=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=5$

답 **5**

0880 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 단 하나의 해를 가지므로 $a<0$

또한 해가 $x=3$뿐이므로

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2\ge0$

$a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

이것을 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$, $2x^2-3x-2<0$ $(\because a<0)$

$(2x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<x<2$

따라서 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 ②

0881 $ax^2+2ax-5>0$에서

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2ax-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2ax-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+5a>0$, $a(a+5)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $a<-5$

(i), (ii)에서 $a<-5$ 또는 $a>0$

답 ③

참고 $a=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니다.

0882 $mx^2+2mx+4>(x+1)^2$에서

$(m-1)x^2+2(m-1)x+3>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $m=1$일 때, (좌변)$=0\times x^2+0\times x+3=3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore m=1$

(ii) $m\neq1$일 때, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$m-1>0$에서 $m>1$

이차방정식 $(m-1)x^2+2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m-1)<0$

$(m-1)(m-4)<0$ $\therefore 1<m<4$

그런데 $m>1$이므로 $1<m<4$

(i), (ii)에서 $1\le m<4$ 답 $\mathbf{1\le m<4}$

0883 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-2kx-2}$가 허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-2kx-2<0$이 성립해야 한다.

(i) $k=0$일 때, (좌변)$=0\times x^2+0\times x-2=-2<0$

$\therefore k=0$

(ii) $k\neq0$일 때, $k<0$

이차방정식 $kx^2-2kx-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2+2k<0$, $k(k+2)<0$ $\therefore -2<k<0$

그런데 $k<0$이므로 $-2<k<0$

(i), (ii)에서 $-2<k\le0$ 답 ②

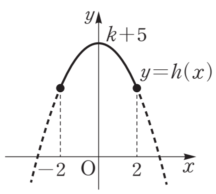
0884 부등식 $f(x)<g(x)$에서 $g(x)-f(x)>0$

$h(x)=g(x)-f(x)$로 놓으면

$h(x)=(-x^2+4x+k+2)-(x^2+4x-3)$

$=-2x^2+k+5$

$-2\le x\le2$에서 $h(x)>0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서



$h(-2)=h(2)>0$이어야 한다.

$h(-2)=h(2)=-8+k+5>0$

$k-3>0$ $\therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 **4**

0885 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=3x-2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 $x^2-ax+b>3x-2$, 즉 $x^2-(a+3)x+b+2>0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)>0$ $\therefore x^2-x-6>0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$a+3=1$, $b+2=-6$

따라서 $a=-2$, $b=-8$이므로

$a+b=-10$ 답 **−10**

0886 주어진 부등식에서

$x-2\le(a-1)x+b\le2x^2+5x+2$

모든 실수 x에 대하여 $x-2\le(a-1)x+b$가 성립하려면

$(a-2)x+b+2\ge0$에서 $a-2=0$, $b+2\ge0$

$\therefore a=2$, $b\ge-2$ …… ㉠

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x+b\le2x^2+5x+2$, 즉 $2x^2+4x+2-b\ge0$이 성립한다.

이때 이차방정식 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(2-b)\le0$ $\therefore b\le0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\le b\le0$

즉, $\alpha=-2$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=2$ 답 ③

0887 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅의 넓이가 200 m^2 이상이 되어야 하므로

$(25-x)(15-x)\ge200$, $x^2-40x+175\ge0$

$(x-5)(x-35)\ge0$ $\therefore x\le5$ 또는 $x\ge35$

이때 $0<x<15$이어야 하므로 도로의 폭은 0 m 초과 5 m 이하이어야 한다. 답 ①

0888 $x^2-x-1\ge-x^2+4x+2$에서 $2x^2-5x-3\ge0$

$(2x+1)(x-3)\ge0$ $\therefore x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge3$ …… ㉠

$-x-15<-x^2+x$에서 $x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore -3<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $3\le x<5$

따라서 정수 x는 -2, -1, 3, 4이므로 구하는 합은 4이다.

답 **4**

0889 $x^2-2x-3>3|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2-2x-3>-3(x-1)$

$x^2+x-6>0$, $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $x<-3$

(ii) $x\ge1$일 때, $x^2-2x-3>3(x-1)$

$x^2-5x>0$, $x(x-5)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>5$

그런데 $x\ge1$이므로 $x>5$

(i), (ii)에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

따라서 $ax^2+2x+b<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로 $a<0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)>0$, 즉 $x^2-2x-15>0$

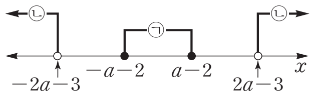
양변에 a를 곱하면 $ax^2-2ax-15a<0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+2x+b<0$과 같으므로

$-2a=2$, $-15a=b$

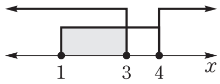
따라서 $a=-1$, $b=15$이므로 $a+b=14$ 답 **14**

0890 $a>0$이므로 $|x+2|\le a$에서
$-a\le x+2\le a$ $\quad\therefore -a-2\le x\le a-2$ ...... ㉠
$x^2+6x-(2a+3)(2a-3)>0$에서
$\{x+(2a+3)\}\{x-(2a-3)\}>0$
$\therefore x<-2a-3$ 또는 $x>2a-3$ ...... ㉡



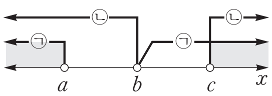
주어진 연립부등식의 해가 없으려면 위의 그림에서
$-2a-3\le -a-2$ $\quad\therefore a\ge -1$ ...... ㉢
$a-2\le 2a-3$ $\quad\therefore a\ge 1$ ...... ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $a\ge 1$
따라서 양수 a의 최솟값은 1이다. 답 **1**

0891 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 \\ x^2+cx+d\le 0 \end{cases}$의 해를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x^2+ax+b\ge 0$의 해는 $x\le 3$ 또는 $x\ge 4$이므로
$(x-3)(x-4)\ge 0$, $x^2-7x+12\ge 0$
$\therefore a=-7$, $b=12$
또, $x^2+cx+d\le 0$의 해는 $1\le x\le 4$이므로
$(x-1)(x-4)\le 0$, $x^2-5x+4\le 0$ $\quad\therefore c=-5$, $d=4$
$\therefore a+b+c+d=4$ 답 **4**

0892 $a<b$이므로 부등식 $(x-a)(x-b)>0$을 풀면
$x<a$ 또는 $x>b$ ...... ㉠
$b<c$이므로 부등식 $(x-b)(x-c)>0$을 풀면
$x<b$ 또는 $x>c$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



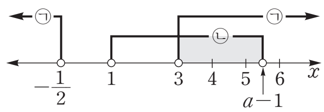
따라서 연립부등식의 해는
$x<a$ 또는 $x>c$이므로 $a=-2$, $c=8$
이때 $x^2+ax-c<0$에서 $x^2-2x-8<0$
$(x+2)(x-4)<0$ $\quad\therefore -2<x<4$
따라서 주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 **5**

0893 두 타일의 가로의 길이를 x cm라 하면 A의 세로의 길이는 $(x+10)$ cm이므로
$x(x+10)\ge 2000$, $x^2+10x-2000\ge 0$
$(x+50)(x-40)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -50$ 또는 $x\ge 40$
그런데 $x>0$이므로 $x\ge 40$ ...... ㉠
B의 세로의 길이는 $(x-30)$ cm이므로
$x(x-30)\le 1800$, $x^2-30x-1800\le 0$
$(x+30)(x-60)\le 0$ $\quad\therefore -30\le x\le 60$
그런데 $x>30$이므로 $30<x\le 60$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $40\le x\le 60$이므로 가로의 길이의 범위는 40 cm 이상 60 cm 이하이다. 답 **40 cm 이상 60 cm 이하**

0894 이차방정식 $x^2+3kx+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=9k^2-4\ge 0$
$(3k+2)(3k-2)\ge 0$ $\quad\therefore k\le -\frac{2}{3}$ 또는 $k\ge \frac{2}{3}$ ...... ㉠
이차방정식 $x^2+kx+k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=k^2-4k<0$
$k(k-4)<0$ $\quad\therefore 0<k<4$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{2}{3}\le k<4$
따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은 6이다. 답 **6**

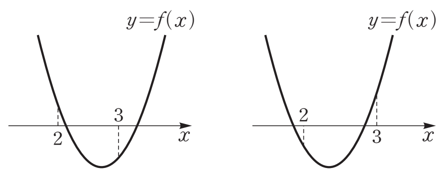
0895 이차방정식 $x^2+(a^2-4a+3)x-a+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로
$\alpha\beta=-a+2<0$ $\quad\therefore a>2$ ...... ㉠
또, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크므로
$\alpha+\beta=-(a^2-4a+3)<0$
$(a-1)(a-3)>0$ $\quad\therefore a<1$ 또는 $a>3$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a>3$ 답 ①

0896 $2x^2-5x-3>0$에서 $(2x+1)(x-3)>0$
$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$ ...... ㉠
$x^2-ax+a-1<0$에서 $(x-1)(x-a+1)<0$
이때 $a>2$이므로 이 부등식의 해는
$1<x<a-1$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x가 두 개만 존재하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$5<a-1\le 6$ $\quad\therefore 6<a\le 7$ 답 **$6<a\le 7$**

0897 $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
$f(x)=x^2-(a-1)x+a+4$로 놓으면 $f(x)=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(2)f(3)<0$이므로
$\{4-2(a-1)+a+4\}\{9-3(a-1)+a+4\}<0$
$(-a+10)(-2a+16)<0$
$(a-10)(a-8)<0$ $\quad\therefore 8<a<10$
따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

0898 이차부등식 $ax^2+5x+b>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로
$a<0$

··· ㉮

해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$, 즉 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{1}{6}a>0$ ($\because a<0$)

··· ㉯

이 부등식이 $ax^2+5x+b>0$과 같으므로
$-\frac{5}{6}a=5$, $\frac{1}{6}a=b$
$\therefore a=-6$, $b=-1$

··· ㉰

$\therefore a-b=-5$

··· ㉱

답 -5

단계	채점요소	배점
㉮	a의 부호 알기	20 %
㉯	조건을 만족시키는 이차부등식 세우기	40 %
㉰	a, b의 값 구하기	30 %
㉱	$a-b$의 값 구하기	10 %

0899 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k+1)x^2+2x+3k+1\le 0$이 성립해야 한다.

··· ㉮

$k+1<0$에서 $k<-1$
이차방정식 $(k+1)x^2+2x+3k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-(k+1)(3k+1)\le 0$
$3k^2+4k\ge 0$, $k(3k+4)\ge 0$
$\therefore k\le -\frac{4}{3}$ 또는 $k\ge 0$
그런데 $k<-1$이므로 $k\le -\frac{4}{3}$

··· ㉯

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

··· ㉰

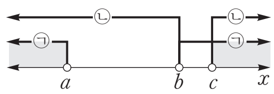
답 -2

단계	채점요소	배점
㉮	이차부등식의 해가 존재하지 않을 조건 구하기	20 %
㉯	k의 값의 범위 구하기	60 %
㉰	정수 k의 최댓값 구하기	20 %

0900 $a<b<c$이므로
$(x-a)(x-b)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>b$ ······ ㉠
$(x-b)(x-c)>0$에서 $x<b$ 또는 $x>c$ ······ ㉡

··· ㉮

따라서 연립부등식
$\begin{cases}(x-a)(x-b)>0\\(x-b)(x-c)>0\end{cases}$의 해는
$x<a$ 또는 $x>c$



··· ㉯

이때 주어진 연립부등식의 해가
$x<-4$ 또는 $x>3$이므로
$a=-4$, $c=3$

··· ㉰

이차부등식 $x^2+ax+c<0$에서
$x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$
$\therefore 1<x<3$

··· ㉱

답 $1<x<3$

단계	채점요소	배점
㉮	부등식 $(x-a)(x-b)>0$과 $(x-b)(x-c)>0$의 해 구하기	30 %
㉯	연립부등식의 해 구하기	30 %
㉰	a, c의 값 구하기	20 %
㉱	부등식 $x^2+ax+c<0$의 해 구하기	20 %

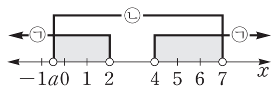
0901 $x^2-6x+8>0$에서 $(x-2)(x-4)>0$
$\therefore x<2$ 또는 $x>4$ ······ ㉠

··· ㉮

$x^2-(a+7)x+7a<0$에서 $(x-a)(x-7)<0$
$\therefore a<x<7$ ($\because a<7$) ······ ㉡

··· ㉯

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x의 개수가 4이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$-1\le a<0$



··· ㉰

답 $-1\le a<0$

단계	채점요소	배점
㉮	부등식 $x^2-6x+8>0$의 해 구하기	30 %
㉯	부등식 $x^2-(a+7)x+7a<0$의 해 구하기	30 %
㉰	a의 값의 범위 구하기	40 %

0902 $f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+p$이므로
$\mathrm{A}\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4}+p\right)$, $\mathrm{B}(0, p)$
이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의

x좌표가 0 또는 $-\frac{p}{2}$이므로

$f(x)-g(x)=x\left(x+\frac{p}{2}\right)\le 0$ …… ㉠

(ⅰ) $p>0$일 때

㉠의 해는 $-\frac{p}{2}\le x\le 0$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되려면 $-10<-\frac{p}{2}\le -9$에서

$18\le p<20$

(ⅱ) $p<0$일 때

㉠의 해는 $0\le x\le -\frac{p}{2}$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되려면 $9\le -\frac{p}{2}<10$에서

$-20<p\le -18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-20<p\le -18$ 또는 $18\le p<20$

따라서 정수 p의 최댓값 $M=19$, 최솟값 $m=-19$이므로

$M-m=19-(-19)=38$

답 ④

0903 $n\le x<n+1$ (n은 정수)일 때,

$[x+1]=n+1$, $[x+6]=n+6$이므로

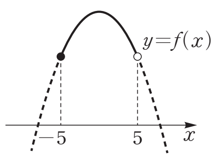
$[x+1]^2-[x+6]-15=(n+1)^2-(n+6)-15\le 0$

$n^2+n-20\le 0$, $(n+5)(n-4)\le 0$ $\therefore -5\le n\le 4$

$\therefore -5\le x<5$

$f(x)=-x^2+2ax+a^2+1$로 놓으면

$-5\le x<5$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(-5)>0$, $f(5)\ge 0$이어야 한다.



$f(-5)=-25-10a+a^2+1>0$에서

$a^2-10a-24>0$, $(a+2)(a-12)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>12$ …… ㉠

$f(5)=-25+10a+a^2+1\ge 0$에서

$a^2+10a-24\ge 0$, $(a+12)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -12$ 또는 $a\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\le -12$ 또는 $a>12$

답 $a\le -12$ 또는 $a>12$

0904 $(x-2)(x-5)$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 $2x+6$이므로

$(2x+6)-\frac{1}{2}\le (x-2)(x-5)<(2x+6)+\frac{1}{2}$

이때 $2x+6$은 정수이므로 $x=\frac{n}{2}$ (n은 정수)으로 놓으면

$(n+6)-\frac{1}{2}\le \left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-5\right)<(n+6)+\frac{1}{2}$

$4n+22\le n^2-14n+40<4n+26$

(ⅰ) $4n+22\le n^2-14n+40$에서

$n^2-18n+18\ge 0$

$\therefore n\le 9-3\sqrt{7}$ 또는 $n\ge 9+3\sqrt{7}$

(ⅱ) $n^2-14n+40<4n+26$에서

$n^2-18n+14<0$

$\therefore 9-\sqrt{67}<n<9+\sqrt{67}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$9-\sqrt{67}<n\le 9-3\sqrt{7}$ 또는 $9+3\sqrt{7}\le n<9+\sqrt{67}$

그런데 n은 정수이므로

$n=9-\sqrt{64}=1$ 또는 $n=9+\sqrt{64}=17$

따라서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{17}{2}$이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{17}{2}=9$

답 9

10 평면좌표

교과서 문제 정/복/하/기

본문 129쪽

0905 $\overline{AB}=|7-3|=4$ 답 **4**

0906 $\overline{AB}=|8-(-2)|=10$ 답 **10**

0907 $\overline{AB}=|-9-(-5)|=4$ 답 **4**

0908 점 R의 좌표를 x라 하면
$|x-4|=3$에서 $x-4=\pm3$
$\therefore x=7$ 또는 $x=1$
$\therefore$ R(7) 또는 R(1) 답 **R(7) 또는 R(1)**

0909 점 S의 좌표를 x라 하면
$|x-(-5)|=5$에서 $x+5=\pm5$
$\therefore x=0$ 또는 $x=-10$
$\therefore$ S(0) 또는 S(-10) 답 **S(0) 또는 S(−10)**

0910 $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{5-(-1)\}^2}=\sqrt{37}$ 답 $\sqrt{37}$

0911 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{-7-(-2)\}^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
답 $5\sqrt{2}$

0912 $\overline{OA}=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$ 답 $\sqrt{41}$

0913 $\overline{AB}=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ 답 $\sqrt{a^2+b^2}$

0914 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times(-4)+3\times10}{2+3}\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\dfrac{22}{5}\right)$
(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1\times(-4)-2\times10}{1-2}\right)$, 즉 Q$(24)$
(3) $\mathrm{M}\left(\dfrac{10+(-4)}{2}\right)$, 즉 M$(3)$
답 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{22}{5}\right)$ (2) **Q(24)** (3) **M(3)**

0915 선분 AB의 중점의 좌표가 1이므로
$\dfrac{-3+a}{2}=1 \qquad \therefore a=5$ 답 **5**

0916 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\times5+2\times(-1)}{3+2}, \dfrac{3\times(-3)+2\times2}{3+2}\right)$,
즉 $\mathrm{P}\left(\dfrac{13}{5}, -1\right)$
(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2\times5-1\times(-1)}{2-1}, \dfrac{2\times(-3)-1\times2}{2-1}\right)$, 즉 Q$(11, -8)$
(3) $\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{2+(-3)}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$
답 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{13}{5}, -1\right)$ (2) **Q(11, −8)** (3) $\mathrm{M}\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$

0917 선분 AB의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로
$\dfrac{a+(-2)}{2}=2, \dfrac{4+b}{2}=1$
따라서 $a=6$, $b=-2$이므로 $ab=-12$ 답 **−12**

0918 $\mathrm{G}\left(\dfrac{1+2+(-6)}{3}, \dfrac{2+(-1)+2}{3}\right)$, 즉 G$(-1, 1)$
답 **G(−1, 1)**

0919 $\mathrm{G}\left(\dfrac{-1+5+2}{3}, \dfrac{2+1+(-3)}{3}\right)$, 즉 G$(2, 0)$
답 **G(2, 0)**

0920 $\mathrm{G}\left(\dfrac{a+(1-2a)+(2+a)}{3}, \dfrac{(5-\sqrt{5})+\sqrt{5}+1}{3}\right)$,
즉 G$(1, 2)$ 답 **G(1, 2)**

0921 무게중심의 좌표가 $(3, -1)$이므로
$\dfrac{5+2+b}{3}=3, \dfrac{a+3+(-1)}{3}=-1$
따라서 $a=-5$, $b=2$이므로 $a+b=-3$ 답 **−3**

유형 익/히/기

본문 130~135쪽

0922 $\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=5\sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $(a-4)^2+(4-a)^2=50$
$2a^2-16a+32=50$, $a^2-8a-9=0$
$(a+1)(a-9)=0$
$\therefore a=9$ ($\because a>0$) 답 **9**

0923 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로
$\sqrt{(a+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(1-3)^2}$
양변을 제곱하면 $(a+1)^2+(-1)^2=(a-2)^2+(-2)^2$
$a^2+2a+2=a^2-4a+8$
$\therefore a=1$ 답 ①

0924 $\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로
$\sqrt{(7-3)^2+(-1-a)^2}=2\sqrt{(-1+a)^2+(2-4)^2}$
양변을 제곱하면 $4^2+(-1-a)^2=4\{(a-1)^2+(-2)^2\}$
$a^2+2a+17=4a^2-8a+20$

$3a^2-10a+3=0$, $(3a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$\frac{1}{3}\times 3=1$ **답 1**

0925 $\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+5)^2}$

$=\sqrt{2a^2+8a+26}$

$=\sqrt{2(a+2)^2+18}$

따라서 $a=-2$일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다. **답 -2**

0926 점 P(a, b)가 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로

$b=2a-7$ …… ㉠

또, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b+1)^2$

$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2-10a+b^2+2b+26$

$8a-8b=16$ $\quad\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

$\therefore a+b=8$ **답 8**

0927 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(-1)^2=(a+1)^2+(-4)^2$

$a^2-4a+5=a^2+2a+17$

$-6a=12$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore$ P$(-2, 0)$

또, Q$(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-2)^2+(b-1)^2=1^2+(b-4)^2$

$b^2-2b+5=b^2-8b+17$

$6b=12$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore$ Q$(0, 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ **답 $2\sqrt{2}$**

0928 삼각형 ABC의 외심을 P(a, b)라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-8)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$

$a^2-16a+b^2-8b+80=a^2-6a+b^2+2b+10$

$-10a-10b=-70$ $\quad\therefore a+b=7$ …… ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-3)^2+(b+1)^2=(a-6)^2+(b-8)^2$

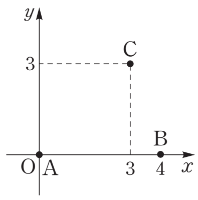
$a^2-6a+b^2+2b+10=a^2-12a+b^2-16b+100$

$6a+18b=90$ $\quad\therefore a+3b=15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=4$ $\quad\therefore$ P$(3, 4)$ **답 (3, 4)**

0929 오른쪽 그림과 같이 학교 A가 원점, 학교 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



A$(0, 0)$, B$(4, 0)$, C$(3, 3)$

도서관을 지으려는 지점을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$, $8a=16$

$\therefore a=2$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-3)^2+(b-3)^2$, $6a+6b=18$

$\therefore b=-a+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=1$

따라서 P$(2, 1)$이므로 구하는 거리는

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ (km) **답 $\sqrt{5}$ km**

0930 $\overline{AB}^2=(-4)^2+(-4-2)^2=52$,

$\overline{BC}^2=(-2)^2+(-2+4)^2=8$,

$\overline{CA}^2=(4+2)^2+(2+2)^2=52$

이므로

$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$ $\quad\therefore \overline{AB}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. **답 ⑤**

0931 $\overline{AB}^2=1^2+(-2-1)^2=10$,

$\overline{BC}^2=(3-1)^2+(2+2)^2=20$,

$\overline{CA}^2=(-3)^2+(1-2)^2=10$

……………… ㉮

이므로 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이고 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$, 즉 $\overline{AB}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$이고 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형이다.

……………… ㉯

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$

……………… ㉰

답 5

단계	채점요소	배점
㉮	$\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$의 값 구하기	50 %
㉯	삼각형 ABC가 직각이등변삼각형임을 알기	30 %
㉰	삼각형 ABC의 넓이 구하기	20 %

0932 $\overline{AB}^2=(-1-a)^2+(2-1)^2=a^2+2a+2$,

$\overline{AC}^2=(3-a)^2+(4-1)^2=a^2-6a+18$,

$\overline{BC}^2=(3+1)^2+(4-2)^2=20$

삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서

$(a^2+2a+2)+(a^2-6a+18)=20$

$2a^2-4a=0,\ 2a(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$ 답 **2**

0933 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$C(a, b)$라 하면

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-2-2)^2+(-4-4)^2=(a+2)^2+(b+4)^2$

$\therefore a^2+b^2+4a+8b-60=0$ …… ㉠

$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a+2)^2+(b+4)^2=(2-a)^2+(4-b)^2$

$8a+16b=0 \qquad \therefore a=-2b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4b^2+b^2-8b+8b-60=0$

$b^2=12 \qquad \therefore b=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore a=\pm4\sqrt{3},\ b=\mp2\sqrt{3}$ (복부호동순)

그런데 점 C가 제 4 사분면 위의 점이므로 $a>0,\ b<0$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$이다.

답 $\boldsymbol{(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})}$

0934 $O(0, 0)$, $A(x, y)$, $B(2, -1)$이라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OA}$, $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{AB}$이므로

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{OA}+\overline{AB}$

$\overline{OA}+\overline{AB}$의 값이 최소인 경우는 점 A가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때이다. 즉,

$\overline{OA}+\overline{AB}\ge\overline{OB}$

$\qquad=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$이다. 답 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

0935 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이다. 즉,

$\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$\qquad=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+\{8-(-4)\}^2}$

$\qquad=\sqrt{169}=13$

따라서 구하는 최솟값은 13이다. 답 ④

0936 $A(1, -3)$, $B(x, y)$, $C(-4, 2)$라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\overline{AB}+\overline{BC}$의 값이 최소인 경우는 점 B가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때이다. 즉,

$\overline{AB}+\overline{BC}\ge\overline{AC}$

$\qquad=\sqrt{(-4-1)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다. 답 $\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

0937 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-1)^2+(-4)^2+(a-5)^2+(-3)^2$

$\qquad=2a^2-12a+51$

$\qquad=2(a-3)^2+33$

따라서 $a=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 33이다. 답 ③

0938 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(a-2)^2+(b-6)^2$

$\qquad=2a^2-12a+2b^2-16b+60$

$\qquad=2(a-3)^2+2(b-4)^2+10$

이때 a, b가 실수이므로 $(a-3)^2\ge0$, $(b-4)^2\ge0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2\ge10$

따라서 $a=3$, $b=4$일 때 주어진 식의 최솟값은 10이므로

$P(3, 4)$ 답 ④

0939 점 P가 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 $P(a, a+3)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-1)^2+(a-5)^2+(a+3)^2+(a-2)^2$
$\qquad+(a-2)^2+(a+4)^2$

$=6a^2-6a+59$

$=6\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{115}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 주어진 식의 최솟값이 $\frac{115}{2}$이므로

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 답 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)}$

0940 점 M이 선분 BC의 중점이므로 $B(\boxed{-c}, 0)$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$\qquad=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$\qquad=2(\boxed{a^2+b^2+c^2})$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2$

$\qquad=\boxed{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) $\boldsymbol{-c}$ (나) $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}$

0941 직사각형 ABCD에서 $A(0, b)$, $C(a, 0)$이므로

$D(\boxed{a}, \boxed{b})$

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$\qquad=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$\qquad=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 (가) $\boldsymbol{a}$ (나) $\boldsymbol{b}$ (다) $\boldsymbol{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$
(라) $\boldsymbol{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

0942 $P\left(\dfrac{2\times(-1)+3\times4}{2+3}, \dfrac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}\right)$,

즉 $P(2, -1)$

$Q\left(\dfrac{2\times(-1)-3\times4}{2-3}, \dfrac{2\times2-3\times(-3)}{2-3}\right)$, 즉 $Q(14, -13)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+14}{2}, \dfrac{-1-13}{2}\right)$, 즉 $(8, -7)$ 답 $(8, -7)$

0943 $B◎C$는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로 $B◎C$의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times6+2\times3}{1+2}, \dfrac{1\times(-4)+2\times(-1)}{1+2}\right)$, 즉 $(4, -2)$

따라서 $A◎(B◎C)$는 $(-5, 4)◎(4, -2)$와 같으므로

$A◎(B◎C)$의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4+2\times(-5)}{1+2}, \dfrac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$, 즉 $(-2, 2)$

답 $(-2, 2)$

0944 선분 AB를 $5:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(n, -5)$이므로

$n=\dfrac{5\times11-2\times2}{5-2}, \quad -5=\dfrac{5\times m-2\times15}{5-2}$

따라서 $m=3$, $n=17$이므로 $m+n=20$ 답 20

0945 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(b+1)+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times(-1)+1\times(a+1)}{2+1}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{2b+4}{3}, \dfrac{a-1}{3}\right)$

이 점이 $(2, 1)$과 같으므로

$\dfrac{2b+4}{3}=2, \dfrac{a-1}{3}=1$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

.... ㉮

$B(2, -1)$, $C(3, 2)$

.... ㉯

선분 BC를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times3-2\times2}{3-2}, \dfrac{3\times2-2\times(-1)}{3-2}\right)$, 즉 $(5, 8)$

.... ㉰

이므로 $x=5$, $y=8$

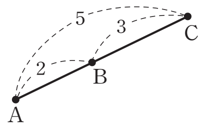
$\therefore |x-y|=3$

.... ㉱

답 3

단계	채점요소	배점
㉮	a, b의 값 구하기	40 %
㉯	점 B, C의 좌표 구하기	10 %
㉰	선분 BC를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표 구하기	40 %
㉱	$\lvert x-y\rvert$의 값 구하기	10 %

0946 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$



이때 $a>0$이므로 직선 AB 위의 세 점 A, B, C는 이 순서로 놓여 있고, 점 C는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{5\times5-3\times(-1)}{5-3}, \dfrac{5\times2-3\times0}{5-3}\right)$, 즉 $(14, 5)$

이므로 $a=14$, $b=5$ $\quad\therefore a+b=19$ 답 ⑤

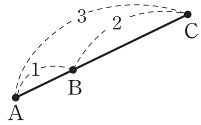
다른풀이 [내분점 이용]

점 B는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{2a-3}{2+3}, \dfrac{2b}{2+3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2a-3}{5}, \dfrac{2b}{5}\right)$

$\dfrac{2a-3}{5}=5, \dfrac{2b}{5}=2$에서 $a=14$, $b=5$ $\quad\therefore a+b=19$

0947 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$



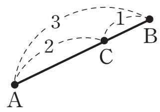
이므로 점 C는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times1-2\times(-1)}{3-2}, \dfrac{3\times4-2\times2}{3-2}\right)$, 즉 $(5, 8)$ 답 ④

0948 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

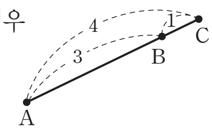
(i) 점 C가 선분 AB 위에 있는 경우



점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times1+1\times(-5)}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $(-1, 2)$

(ii) 점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우



점 C는 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{4\times1-1\times(-5)}{4-1}, \dfrac{4\times3-1\times0}{4-1}\right)$, 즉 $(3, 4)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는

$(-1, 2)$ 또는 $(3, 4)$ 답 $(-1, 2)$ 또는 $(3, 4)$

0949 두 점 $A(1, -3)$, $B(-4, 6)$에 대하여 선분 AB를 $k:(2-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times(-4)+(2-k)\times1}{k+(2-k)}, \dfrac{k\times6+(2-k)\times(-3)}{k+(2-k)}\right)$, 즉

$\left(\dfrac{2-5k}{2}, \dfrac{9k-6}{2}\right)$

이때 이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$\dfrac{2-5k}{2}<0, \dfrac{9k-6}{2}>0$

$\dfrac{2-5k}{2}<0$에서 $k>\dfrac{2}{5}$ ...... ㉠

$\dfrac{9k-6}{2}>0$에서 $k>\dfrac{2}{3}$ ...... ㉡

그런데 $k>0$, $2-k>0$에서 $0<k<2$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서 k의 값의 범위는

$\frac{2}{3}<k<2$ 답 $\frac{2}{3}<k<2$

참고 선분 AB를 $m:n$으로 내분하면 $m>0$, $n>0$

0950 선분 AB를 $(4-t):t$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{(4-t)\times2-t\times4}{(4-t)-t}, \frac{(4-t)\times a-t\times(-3)}{(4-t)-t}\right)$, 즉

$\left(\frac{8-6t}{4-2t}, \frac{4a+(3-a)t}{4-2t}\right)$

이 점이 $(1, 6)$과 같으므로

$\frac{8-6t}{4-2t}=1$, $\frac{4a+(3-a)t}{4-2t}=6$

$\therefore t=1$, $a=3$ 답 ②

0951 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\times5+n\times(-6)}{m+n}, \frac{m\times(-6)+n\times4}{m+n}\right)$, 즉

$\left(\frac{5m-6n}{m+n}, \frac{-6m+4n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다. 즉,

$\frac{5m-6n}{m+n}=0$ $\quad\therefore 5m=6n$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=6$, $n=5$

$\therefore m-n=1$ 답 1

0952 선분 AB를 $k:5$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\times2-5\times(-1)}{k-5}, \frac{k\times4-5\times1}{k-5}\right)$, 즉 $\left(\frac{2k+5}{k-5}, \frac{4k-5}{k-5}\right)$

이 점이 직선 $y=-x-4$ 위에 있으므로

$\frac{4k-5}{k-5}=-\frac{2k+5}{k-5}-4$ $\quad\therefore k=2$ 답 2

0953 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, -2)$이므로

$\frac{a-b-2}{3}=1$에서 $a-b=5$ …… ㉠

$\frac{b+4+5}{3}=-2$에서 $b=-15$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=-10$

$\therefore a+b=-25$ 답 ②

0954 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(6, 8)$이므로

$\frac{2+x_1+x_2}{3}=6$ $\quad\therefore x_1+x_2=16$

$\frac{4+y_1+y_2}{3}=8$ $\quad\therefore y_1+y_2=20$

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=8$, $\frac{y_1+y_2}{2}=10$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $(8, 10)$이다. 답 ②

0955 $\mathrm{B}(a, b)$, $\mathrm{C}(c, d)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표가 $(0, 4)$이므로

$\frac{a+c}{2}=0$, $\frac{b+d}{2}=4$

$\therefore a+c=0$, $b+d=8$ …… ㉠

…… ㉮

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (x, y)이므로

$\frac{3+a+c}{3}=x$, $\frac{2+b+d}{3}=y$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x=1$, $y=\frac{10}{3}$

…… ㉯

$\therefore x+y=\frac{13}{3}$

…… ㉰

답 $\frac{13}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$a+c$, $b+d$의 값 구하기	40 %
㉯	x, y의 값 구하기	40 %
㉰	$x+y$의 값 구하기	20 %

0956 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 PQR의 무게중심과 같으므로

$\mathrm{G}\left(\frac{-1+1+0}{3}, \frac{1+2+3}{3}\right)$, 즉 $\mathrm{G}(0, 2)$

따라서 $x=0$, $y=2$이므로 $x+3y=6$ 답 6

0957 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{3+(-4)+7}{3}\right)$, 즉 $(1, 2)$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $a-b=-1$ 답 ②

0958 △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$이라 하고, $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\\&\qquad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\qquad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\qquad+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소이므로 점 P는 △ABC의 무게중심이다. 답 ③

0959 D(x, y)라 하면 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+3}{2}=\frac{0+x}{2},\ \frac{3+2}{2}=\frac{0+y}{2} \qquad \therefore x=2,\ y=5$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2, 5)$이다. 답 **(2, 5)**

0960 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1-3}{2},\ \frac{4+2}{2}=\frac{1+c}{2} \qquad \therefore a+b=-2,\ c=5$$

$\therefore a+b+c=3$ 답 **3**

0961 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c+d}{2}, \frac{3-5}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{c+d}{2}, -1\right)$

이고, 이 점은 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$$-1=-\frac{c+d}{2} \qquad \therefore c+d=2$$

또, 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b-4}{2}\right)$이고, 이 점은 대각선 BD의 중점 $(1, -1)$과 일치하므로

$$\frac{a-2}{2}=1,\ \frac{b-4}{2}=-1 \qquad \therefore a=4,\ b=2$$

$\therefore a+b+c+d=8$ 답 ③

0962 마름모의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+4}{2}=\frac{2+b}{2} \qquad \therefore b=a+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, 마름모는 네 변의 길이가 같으므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(2-a)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(4-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=1,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=5$

따라서 ab의 값은 3 또는 15이다. 답 ②, ④

유형 up

본문 136쪽

0963 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-8-4)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(1-4)^2}=5$

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=13:5$

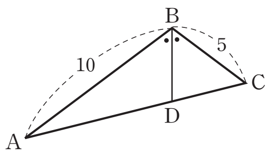
따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\times5+5\times(-4)}{13+5}, \frac{13\times1+5\times(-8)}{13+5}\right),\ 즉 \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

답 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

0964 $\overline{AB}=\sqrt{(6+2)^2+(9-3)^2}$

$=10$



$\overline{BC}=\sqrt{(10-6)^2+(6-9)^2}=5$

$\overline{BD}$는 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{BC}$

$=10:5=2:1$

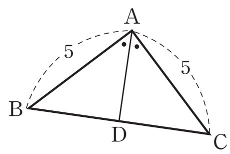
따라서 점 D는 $\overline{AC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\times10+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times6+1\times3}{2+1}\right),\ 즉\ (6, 5)$$

따라서 $a=6,\ b=5$이므로

$a-b=1$ 답 ①

0965 $\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(1-4)^2}=5$



$\overline{AC}=\sqrt{(8-5)^2+(0-4)^2}=5$

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:1$

$\therefore \triangle DAB:\triangle DAC=\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$

따라서 $p=1,\ q=1$이므로

$p+q=2$ 답 **2**

0966 A(a, b), $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\times3+1\times a}{2+1},\ y=\frac{2\times2+1\times b}{2+1}$$

$\therefore a=3x-6,\ b=3y-4$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 점 A는 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$b=3a+2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y-4=3(3x-6)+2$

$\therefore 3x-y-4=0$ 답 ⑤

0967 P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2=(x+1)^2+(y-2)^2$, $\overline{PB}^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

이때 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=9$이므로

$(x+1)^2+(y-2)^2-\{(x-2)^2+(y-4)^2\}=9$

$\therefore 3x+2y-12=0$ 답 **$3x+2y-12=0$**

0968 P(x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(x+1)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$
$\therefore 6x-4y+13=0$ 답 $\mathbf{6x-4y+13=0}$

시험에 꼭 나오는 문제

본문 137~139쪽

0969 $\overline{AB}\le 6$에서 $\overline{AB}^2\le 6^2$이므로
$(t-2)^2+(8-t)^2\le 36,\ t^2-10t+16\le 0$
$(t-2)(t-8)\le 0 \qquad \therefore 2\le t\le 8$
따라서 정수 t는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다. 답 ④

0970 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+3)^2+(b-5)^2$
$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2+6a+b^2-10b+34$
$-8a+4b=24 \qquad \therefore 2a-b=-6$ …… ㉠
$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b+1)^2$
$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2+2a+b^2+2b+2$
$-4a-8b=-8 \qquad \therefore a+2b=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$
$\therefore a-b=-4$ 답 $\mathbf{-4}$

0971 $\overline{AB}^2=(2+1)^2+(4+1)^2=34$
$\overline{BC}^2=(3-2)^2+(0-4)^2=17$
$\overline{CA}^2=(-1-3)^2+(-1)^2=17$
이므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2,\ \overline{BC}^2=\overline{CA}^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$이고 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 직각이등변 삼각형이다. 답 ②

0972 P(x, y), A$(-1, -2)$, B$(2, 2)$라 하면
$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\overline{AP}+\overline{BP}$
$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이다.
즉,
$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$
$\qquad =\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$
따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ③

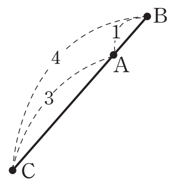
0973 출발한 지 t시간 후의 두 점 P, Q의 좌표는
P$(0, 10-8t)$, Q$(6t, 0)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(6t)^2+(-10+8t)^2}$
$\quad =\sqrt{100t^2-160t+100}$
$\quad =\sqrt{100\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+36}$
따라서 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은 출발한 지 $\frac{4}{5}$시간 후이다. 답 $\mathbf{\frac{4}{5}}$**시간**

0974 P$(0, a)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-4)^2+(a+2)^2+(-k)^2+(a-6)^2$
$\qquad =2a^2-8a+56+k^2$
$\qquad =2(a-2)^2+48+k^2$
따라서 $a=2$일 때 주어진 식의 최솟값은 $48+k^2$이므로
$48+k^2=57 \qquad \therefore k^2=9$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$ 답 ③

0975 $\overline{BD}=2\overline{CD}$이므로 B$(\boxed{-2c}, 0)$
$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$
$\qquad =a^2+4ac+4c^2+b^2+2a^2-4ac+2c^2+2b^2$
$\qquad =3(\boxed{a^2+b^2+2c^2})$
$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=(a^2+b^2)+2c^2$
$\qquad =\boxed{a^2+b^2+2c^2}$
$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$ 답 ④

0976 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\times3+3\times8}{2+3}, \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)$, 즉 $(6, -2)$
선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{2\times3-3\times8}{2-3}, \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)$, 즉 $(18, -14)$
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\frac{6+18}{2}, \frac{-2-14}{2}\right)$, 즉 $(12, -8)$ 답 $\mathbf{(12, -8)}$

0977 $4\overline{AC}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:4$
이때 $a<0$이므로 직선 AB 위의 세 점 A, B, C는 C, A, B의 순서로 놓여 있고, 점 C는 $\overline{BA}$를 4 : 3으로 외분하는 점이다.



따라서 점 C의 좌표는
$\left(\frac{4\times(-1)-3\times2}{4-3}, \frac{4\times(-1)-3\times4}{4-3}\right)$, 즉 $(-10, -16)$
이므로 $a=-10,\ b=-16$
$\therefore a+b=-26$ 답 $\mathbf{-26}$

다른풀이 [내분점 이용]
점 A는 $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 점 A의 좌표는
$\left(\frac{1\times a+3\times2}{1+3}, \frac{1\times b+3\times4}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+6}{4}, \frac{b+12}{4}\right)$
이 점이 A$(-1, -1)$과 같으므로
$\frac{a+6}{4}=-1,\ \frac{b+12}{4}=-1$
$\therefore a=-10,\ b=-16$
$\therefore a+b=-26$

0978 두 점 A$(-2, 0)$, B$(0, 7)$을 이은 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times0+k\times(-2)}{1+k}, \frac{1\times7+k\times0}{1+k}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{-2k}{1+k}, \frac{7}{1+k}\right)$$

그런데 이 점이 직선 $x+2y=2$ 위에 있으므로

$$\frac{-2k}{1+k}+2\times\frac{7}{1+k}=2, \ -2k+14=2(1+k)$$

$4k=12 \qquad \therefore k=3$

답 ③

0979 B(a_1, b_1), C(a_2, b_2)라 하면 두 점 M, N은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로

$\dfrac{1+a_1}{2}=x_1$에서 $1+a_1=2x_1$ …… ㉠

$\dfrac{6+b_1}{2}=y_1$에서 $6+b_1=2y_1$ …… ㉡

$\dfrac{1+a_2}{2}=x_2$에서 $1+a_2=2x_2$ …… ㉢

$\dfrac{6+b_2}{2}=y_2$에서 $6+b_2=2y_2$ …… ㉣

㉠+㉢을 하면 $2+a_1+a_2=2(x_1+x_2)$

$2+a_1+a_2=4 \qquad \therefore a_1+a_2=2$

㉡+㉣을 하면 $12+b_1+b_2=2(y_1+y_2)$

$12+b_1+b_2=8 \qquad \therefore b_1+b_2=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

답 ③

0980 B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)라 하면 $\overline{AB}$의 중점 M의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$$\frac{3+b_1}{2}=4, \ \frac{-2+b_2}{2}=2$$

$\therefore b_1=5, b_2=6 \qquad \therefore$ B$(5, 6)$

또, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$이므로

$$\frac{3+5+c_1}{3}=\frac{4}{3}, \ \frac{-2+6+c_2}{3}=2$$

$\therefore c_1=-4, c_2=2 \qquad \therefore$ C$(-4, 2)$

따라서 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-4)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times2+1\times6}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{10}{3}\right)$$

이므로 $a=-1$, $b=\dfrac{10}{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{7}{3}$

답 $\dfrac{7}{3}$

0981 마름모의 성질에 의하여 두 대각선 BD와 AC의 중점이 일치하므로

$$\frac{3+a}{2}=4, \ \frac{5+b}{2}=2$$

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로 $a+b=4$

답 4

0982 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+ab}{2}, \frac{5+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{ab}{2}, 3\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{a+b}{2}\right)$$

두 점 $\left(\frac{ab}{2}, 3\right)$과 $\left(4, \frac{a+b}{2}\right)$가 일치하므로

$\dfrac{ab}{2}=4$에서 $ab=8$

$\dfrac{a+b}{2}=3$에서 $a+b=6$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\qquad =6^3-3\times8\times6=72$

답 ②

0983 삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$

(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$2^2=a^2+(\sqrt{3})^2, \ a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

…… ㉮

(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$2^2=(a-2)^2+(\sqrt{3})^2$

$a^2-4a+3=0, \ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

…… ㉯

(i), (ii)에서 $a=1$

…… ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	$\overline{OA}=\overline{OB}$일 때, a의 값 구하기	40 %
㉯	$\overline{OA}=\overline{AB}$일 때, a의 값 구하기	40 %
㉰	a의 값 구하기	20 %

0984 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{t\times5+(1-t)\times0}{t+(1-t)}, \frac{t\times(-3)+(1-t)\times2}{t+(1-t)}\right), \text{ 즉}$$

$(5t, -5t+2)$

…… ㉮

이때 점 P가 x축 위의 점이므로

$-5t+2=0 \qquad \therefore t=\dfrac{2}{5}$

$\therefore$ P$(2, 0)$

…… ㉯

따라서 선분 OP를 $t:(1+t)$로 외분하는 점의 x좌표는

$$\frac{t\times 2-(1+t)\times 0}{t-(1+t)}=-2t=(-2)\times\frac{2}{5}=-\frac{4}{5}$$

·· ㉰

답 $-\frac{4}{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	점 P의 좌표를 t로 나타내기	40 %
㉯	점 P의 좌표 구하기	20 %
㉰	선분 OP를 $t:(1+t)$로 외분하는 점의 x좌표 구하기	40 %

0985 D(a, b)라 하면 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

즉, 두 점 $\left(\frac{3+k}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$와 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$가 일치하므로

$\frac{3+k}{2}=\frac{4+a}{2}$, $2=\frac{4+b}{2}$

$\therefore b=0,\ k=a+1$

·· ㉮

또, 사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로

$\overline{AB}+\overline{AD}=3\sqrt{5}$에서

$\sqrt{(4-3)^2+(4-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=3\sqrt{5}$

$\sqrt{a^2-6a+13}=2\sqrt{5}$ ($\because b=0$)

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

·· ㉯

$a=-1$일 때, $k=-1+1=0$

$a=7$일 때, $k=7+1=8$

따라서 구하는 k의 값은 0 또는 8이다.

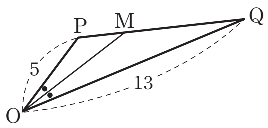
·· ㉰

답 **0, 8**

단계	채점요소	배점
㉮	선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치함을 이해하기	30 %
㉯	점 D의 x좌표 구하기	50 %
㉰	k의 값 구하기	20 %

0986 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$



$\angle$POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{PM}:\overline{MQ}=\overline{OP}:\overline{OQ}=5:13$

·· ㉮

따라서 점 M은 $\overline{PQ}$를 $5:13$으로 내분하는 점이므로 점 M의 x좌표는

$$\frac{5\times 12+13\times 3}{5+13}=\frac{11}{2} \qquad \therefore a=2,\ b=11$$

·· ㉯

$\therefore a+b=13$

·· ㉰

답 **13**

단계	채점요소	배점
㉮	$\overline{PM}:\overline{MQ}$를 가장 간단한 정수의 비로 나타내기	30 %
㉯	a, b의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b$의 값 구하기	20 %

0987 $\overline{AP}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로 $\triangle$ABP에서 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$13:5=\overline{PB}:\overline{PC}$

따라서 점 P는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{13\times 4-5\times(-5)}{13-5}, \frac{13\times 0-5\times(-9)}{13-5}\right)$, 즉 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$

따라서 $a=\frac{77}{8}$, $b=\frac{45}{8}$이므로 $a-b=4$ 답 ⑤

0988 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다.

또, $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이고, $\overline{GM}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{AG}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AM}=\overline{AG}+\overline{GM}=3\sqrt{2}$

또, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립하므로

$6^2+\overline{AC}^2=2\{(3\sqrt{2})^2+3^2\}$

$36+\overline{AC}^2=54$, $\overline{AC}^2=18$

$\therefore \overline{AC}=3\sqrt{2}$ ($\because \overline{AC}>0$) 답 $\mathbf{3\sqrt{2}}$

0989 소매상의 위치를 각각 A$(-2a)$, B(0), C(a) $(a>0)$, 도매상의 위치를 P(x)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2&=(x+2a)^2+x^2+(x-a)^2\\&=3x^2+2ax+5a^2\\&=3\left(x+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{14}{3}a^2\end{aligned}$$

$x=-\frac{1}{3}a$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이 최소이므로 운반 비용도 최소가 된다. 이때

$\overline{AP}=\left|-\frac{1}{3}a-(-2a)\right|=\frac{5}{3}a$

$\overline{BP}=\left|-\frac{1}{3}a-0\right|=\frac{1}{3}a$

이므로 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:1$

따라서 도매상의 위치는 $\overline{AB}$를 $5:1$로 내분하는 점이다. 답 ④

11 직선의 방정식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 141쪽

0990 $y-(-1)=2(x-1)$ $\therefore y=2x-3$

답 $\boldsymbol{y=2x-3}$

0991 $y-3=-5(x-0)$ $\therefore y=-5x+3$

답 $\boldsymbol{y=-5x+3}$

0992 $y-3=\dfrac{-3-3}{4-2}(x-2)$ $\therefore y=-3x+9$

답 $\boldsymbol{y=-3x+9}$

0993 두 점의 y좌표가 모두 4이므로 $y=4$ 답 $\boldsymbol{y=4}$

0994 답 $\boldsymbol{-\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{5}=1}$

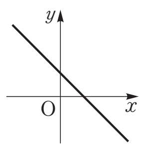
0995 (1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

(기울기)$=-\dfrac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\dfrac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4 사분면을 지난다.

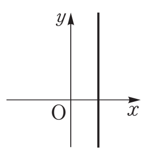


(2) $ax+by+c=0$에서 $b=0$이므로 $ax+c=0$

$\therefore x=-\dfrac{c}{a}$

$a>0$, $c<0$이므로 $-\dfrac{c}{a}>0$

따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4 사분면을 지난다.



답 (1) **제1, 2, 4 사분면** (2) **제1, 4 사분면**

0996 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$4x+5y+3=0$, $2x+3y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다. 답 $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$

0997 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$2x+y-1+k(x-2y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y-1=0$, $x-2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{1}{5}$, $y=\dfrac{3}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$이다. 답 $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)}$

0998 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-3y-1+k(2x-4y+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$-1+k=0$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$2x-3y-1+2x-4y+1=0$

$\therefore 4x-7y=0$ 답 $\boldsymbol{4x-7y=0}$

0999 (1) ㄴ. $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-4}{1}$이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $4x+2y+1=0$은 서로 평행하다.

(2) ㄷ. $2\times1+1\times(-2)=0$이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+5=0$은 서로 수직이다.

답 (1) ㄴ (2) ㄷ

1000 (1) $-\dfrac{1}{2}=a+1$ $\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

(2) $-\dfrac{1}{2}\times(a+1)=-1$ $\therefore a=1$

답 (1) $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$ (2) **1**

1001 (1) 두 직선이 평행하려면 $\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{2}\neq\dfrac{1}{1}$

$\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{2}$에서 $a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$\dfrac{a}{2}\neq\dfrac{1}{1}$에서 $a\neq2$이므로 $a=-1$

(2) 두 직선이 일치하려면

$\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{1}$ $\therefore a=2$

(3) 두 직선이 수직이려면

$1\times(a-1)+a\times2=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\boldsymbol{-1}$ (2) **2** (3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

1002 직선 $3x+2y+1=0$, 즉 $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$이고 점 $(2,\ -3)$을 지나므로 이 직선의 방정식은 $y-(-3)=-\dfrac{3}{2}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x$ 답 $\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x}$

1003 직선 $y=-3x+1$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

이 직선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{3}\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ 　　답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

1004 $\frac{|1\times1-2\times4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 　　답 $\sqrt{5}$

1005 $\frac{|6\times(-3)+8\times2-3|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ 　　답 $\frac{1}{2}$

1006 $\frac{|6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{6}{5}$ 　　답 $\frac{6}{5}$

1007 두 직선 $x-y-3=0$, $x-y+3=0$이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y-3=0$ 위의 한 점 $(0,\ -3)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore\ \frac{|0+3+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ 　　답 $3\sqrt{2}$

유형 익/히/기

본문 142~148쪽

1008 두 점 $(-4,\ 2)$, $(6,\ 8)$을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{2+8}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y-5=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x+7$ 　　답 $y=-2x+7$

1009 직선 $y=-3x+1$과 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y-2=-3(x-1)$ 　　$\therefore\ y=-3x+5$

따라서 $a=-3$, $b=5$이므로

$a-b=-8$ 　　답 -8

1010 직선 $3x-y-5=0$, 즉 $y=3x-5$의 기울기는 3이므로 점 $(-1,\ -1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$ 　　$\therefore\ 3x-y+2=0$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $ab=6$ 　　답 6

1011 주어진 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$ 　　$\therefore\ y=x-3$

따라서 $m-2=1$, $-n-1=-3$이므로 $m=3$, $n=2$

$\therefore\ m+n=5$ 　　답 5

1012 두 점 $(-2,\ 3)$, $(3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-2-3}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$ 　　$\therefore\ y=-x+1$

두 점 $(-5,\ a)$, $(b,\ 2)$가 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$a=-(-5)+1$, $2=-b+1$

따라서 $a=6$, $b=-1$이므로

$a-b=7$ 　　답 ⑤

1013 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(1,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times1+3\times6}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)$, 즉 $(4,\ -2)$ ······ ㉮

두 점 $(4,\ -2)$, $(-1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

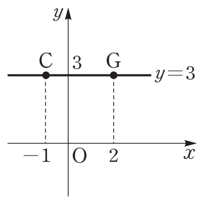
$y-(-2)=\frac{3-(-2)}{-1-4}(x-4)$ 　　$\therefore\ y=-x+2$ ······ ㉯

따라서 y절편은 2이다. ······ ㉰

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	선분 AB의 내분점 구하기	30 %
㉯	직선의 방정식 구하기	40 %
㉰	y절편 구하기	30 %

1014 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는



$\left(\frac{3+4-1}{3},\ \frac{5+1+3}{3}\right)$ 　　$\therefore$ G$(2,\ 3)$

따라서 두 점 C$(-1,\ 3)$, G$(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3$ 　　답 $y=3$

1015 x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 x절편을 $a(a\neq0)$라 하면 y절편은 $-a$이다.

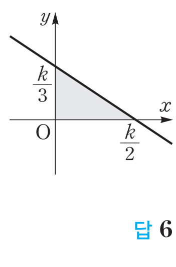
따라서 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ 　　$\therefore\ y=x-a$

이 직선이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=-2-a$ 　　$\therefore\ a=-6$ 　　답 -6

1016 $2x+3y=k$에서



x절편은 $\frac{k}{2}$, y절편은 $\frac{k}{3}$이다.

오른쪽 그림에서 삼각형의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times\frac{k}{3}=3$, $k^2=36$

$\therefore\ k=6\ (\because\ k>0)$ 　　답 6

1017 세 점 $A(1, 3)$, $B(a, 5)$, $C(3, 2a+3)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다. 즉,

$\frac{5-3}{a-1}=\frac{(2a+3)-3}{3-1}$, $\frac{2}{a-1}=a$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 이 직선의 기울기가 2이고 점 $A(1, 3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\therefore y=2x+1$

답 $\boldsymbol{y=2x+1}$

1018 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다. 즉,

$\frac{k+1}{2-k}=\frac{7-k}{5-2}$, $3(k+1)=(2-k)(7-k)$

$k^2-12k+11=0$, $(k-1)(k-11)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=11$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 12이다.

답 **12**

1019 주어진 직선이 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)$ $\therefore M(2, -2)$

두 점 $A(3, 3)$, $M(2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-2-3}{2-3}(x-3)$

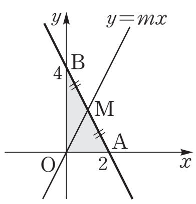
$\therefore y=5x-12$

따라서 $a=5$, $b=-12$이므로

$a+b=-7$

답 **−7**

1020 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$은 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 4)$를 지나므로 오른쪽 그림의 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx$는 선분 AB의 중점 $M(1, 2)$를 지난다.

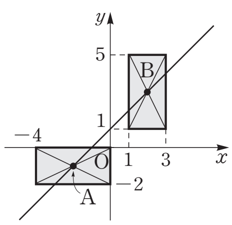


$\therefore m=2$

답 ②

1021 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 각각의 대각선의 교점을 지나야 한다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 직사각형의 대각선의 교점을 각각 A, B라 하면



$A\left(\frac{-4}{2}, \frac{-2}{2}\right)$, 즉 $A(-2, -1)$

$B\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 $B(2, 3)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{3-(-1)}{2-(-2)}(x+2)$ $\therefore y=x+1$

따라서 이 직선의 x절편은 -1, y절편은 1이므로 그 곱은 -1이다.

답 **−1**

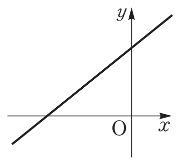
1022 $ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab<0$, $bc<0$이므로 $\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}<0$

$\therefore -\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉, 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 직선은 제 4 사분면을 지나지 않는다.

답 ④

1023 $3x+ay+b=0$에서 $y=-\frac{3}{a}x-\frac{b}{a}$이고 이 직선이 제 1, 3, 4 사분면을 지나므로 기울기는 양수이고 y절편은 음수이어야 한다.

즉, $-\frac{3}{a}>0$, $-\frac{b}{a}<0$에서 $a<0$, $b<0$

따라서 직선 $ax+by+2=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{2}{b}$의 기울기 $-\frac{a}{b}$는 음수, y절편 $-\frac{2}{b}$는 양수이므로 이 직선은 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

답 **제 1, 2, 4 사분면**

1024 직선 $ax+by-2=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{2}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $\frac{2}{b}<0$ $\therefore a<0$, $b<0$

$-x+ay-b=0$에서 $y=\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$

이때 $\frac{1}{a}<0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $-x+ay-b=0$의 기울기는 음수, y절편은 양수이다.

따라서 이 직선의 개형은 ③이다.

답 ③

1025 $mx+y+3m-4=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x+3)+y-4=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+3=0$, $y-4=0$ $\therefore x=-3$, $y=4$

즉, $P(-3, 4)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

답 **5**

1026 $(2k+1)x-(k-1)y-5k-4=0$을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y-5)k+x+y-4=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$2x-y-5=0$, $x+y-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$
즉, 주어진 직선은 항상 점 $\mathrm{P}(3, 1)$을 지난다.
따라서 기울기가 -2이고 점 $\mathrm{P}(3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=-2(x-3)$
$\therefore 2x+y-7=0$ 답 ④

1027 점 (a, b)가 직선 $-2x+y=3$ 위에 있으므로
$-2a+b=3 \quad \therefore b=2a+3$ …… ㉠
㉠을 $2ax-3by=9$에 대입하면
$2ax-3(2a+3)y=9$
$\therefore (2x-6y)a-9y-9=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$2x-6y=0$, $-9y-9=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=-1$
따라서 직선 $2ax-3by=9$는 항상 점 $(-3, -1)$을 지난다.
답 ②

1028 두 직선 $2x-3y-1=0$, $x+y-3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$2x-3y-1+k(x+y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나므로
$2-3-1+k(1+1-3)=0$
$-2-k=0 \quad \therefore k=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$2x-3y-1-2(x+y-3)=0$
$-5y+5=0 \quad \therefore y-1=0$
따라서 $a=0$, $b=1$이므로
$a-b=-1$ 답 $\mathbf{-1}$

1029 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x+y+1+k(2x-y-1)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(1, -1)$을 지나므로
$1-1+1+k(2+1-1)=0$
$1+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
$x+y+1-\frac{1}{2}(2x-y-1)=0$
$\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0 \quad \therefore y=-1$
따라서 직선 $y=-1$ 위에 있는 점의 좌표는 ①이다. 답 ①

1030 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$5x+15y-7+k(x+5y-11)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(5, -6)$을 지나므로
$25-90-7+k(5-30-11)=0$
$-72-36k=0 \quad \therefore k=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$5x+15y-7-2(x+5y-11)=0$
$\therefore 3x+5y+15=0$
따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각
$(-5, 0)$, $(0, -3)$이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는
$\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$ 답 $\mathbf{\sqrt{34}}$

1031 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$ax+(a+1)y+2+k\{(a-6)x+ay-2\}=0$ (k는 실수)
…… ㉠
으로 놓으면 직선 ㉠이 원점을 지나므로
$2-2k=0 \quad \therefore k=1$
이것을 ㉠에 대입하면
$ax+(a+1)y+2+(a-6)x+ay-2=0$
$\therefore (2a-6)x+(2a+1)y=0$
이 직선의 기울기가 2이므로
$-\frac{2a-6}{2a+1}=2$, $-2a+6=4a+2$
$\therefore a=\frac{2}{3}$ 답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

1032 두 직선이 평행하거나 일치하려면
$\frac{2}{k+1}=\frac{-k}{-1}$에서 $-k^2-k=-2$
$k^2+k-2=0$, $(k+2)(k-1)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=1$
(i) $k=-2$일 때, $\frac{2}{-1}=\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{-2}$이므로 두 직선은 평행하다. $\therefore a=-2$
(ii) $k=1$일 때, $\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}$이므로 두 직선은 일치한다.
$\therefore b=1$
(i), (ii)에서 $a-b=-3$ 답 $\mathbf{-3}$

1033 두 직선이 서로 수직이려면
$3\times(a-2)+(a-1)\times(-2)=0$
$\therefore a=4$ 답 **4**

1034 두 직선이 각각 점 $(-1, 5)$를 지나므로
$2+5a+3=0 \quad \therefore a=-1$
$-b+5c+11=0 \quad \therefore -b+5c=-11$ …… ㉠
두 직선 $-2x-y+3=0$, $bx+cy+11=0$이 서로 수직이므로
$-2b-c=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=-2$
$\therefore abc=2$ 답 ③

1035 직선 $x-ay+1=0$이 직선 $x+(b-2)y-1=0$과 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{-a}{b-2}\neq\frac{1}{-1}$에서 $-a=b-2$　　$\therefore a+b=2$

……………… ㉮

직선 $x-ay+1=0$이 직선 $(a+1)x-(b-1)y+1=0$과 수직이므로

$1\times(a+1)-a(-b+1)=0$　　$\therefore ab=-1$

……………… ㉯

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=2^2-2\times(-1)=6$

……………… ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	두 직선이 평행할 조건 구하기	40 %
㉯	두 직선이 수직일 조건 구하기	40 %
㉰	a^2+b^2의 값 구하기	20 %

1036 두 점 $(-3, 5)$, $(5, -7)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-7-5}{5-(-3)}=-\frac{3}{2}$

기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=-\frac{3}{2}(x-2)$　　$\therefore 3x+2y-16=0$

따라서 $a=3$, $b=-16$이므로

$a+b=-13$　　답 ①

1037 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{6-(-3)}=\frac{1}{3}$

이므로 구하는 직선의 기울기는 -3이다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times6+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times4+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $(0, 2)$

따라서 기울기가 -3이고 점 $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-3x+2$　　답 $\boldsymbol{y=-3x+2}$

1038 직선 $x+3y-9=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+3$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 직선 AH의 기울기는 3이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-11=3(x-6)$　　$\therefore 3x-y-7=0$

점 H는 직선 AH와 직선 $x+3y-9=0$의 교점이므로

$x+3y-9=0$, $3x-y-7=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=2$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$ab=6$　　답 ③

1039 두 점 $A(a, 3)$, $B(4, 5)$에 대하여 직선 AB와 직선 $y=-x+b$가 수직이므로

$\frac{5-3}{4-a}\times(-1)=-1$　　$\therefore a=2$

직선 $y=-x+b$가 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(3, 4)$를 지나므로

$4=-3+b$　　$\therefore b=7$

$\therefore a+b=9$　　답 9

1040 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(-1, 4)$

두 점 $A(1, 3)$, $B(-3, 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-3}{-3-1}=-\frac{1}{2}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(-1, 4)$를 지나는 직선이므로

$y-4=2(x+1)$　　$\therefore y=2x+6$　　답 ⑤

1041 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2}, 4\right)$

직선 $2x+y-4=0$이 이 점을 지나므로

$2\times\frac{a+b}{2}+4-4=0$　　$\therefore a+b=0$　　…… ㉠

또, 직선 $2x+y-4=0$의 기울기가 -2이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

즉, $\frac{5-3}{b-a}=\frac{1}{2}$이므로 $b-a=4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=8$　　답 8

1042 (i) 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(2, 3)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{6-0}{3-1}=3$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선이므로

$y-3=-\frac{1}{3}(x-2)$　　$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$　　…… ㉠

(ii) 선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(5, 4)$

직선 BC의 기울기는 $\frac{6-2}{3-7}=-1$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $(5, 4)$를 지나는 직선이므로

$y-4=x-5$　　$\therefore y=x-1$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$이다.　　답 $\boldsymbol{\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

1043 $x+2y=0$ ...... ㉠

$x-y+3=0$ ...... ㉡

$ax+y+a+1=0$ ...... ㉢

이라 하면 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{-1}\neq\frac{a+1}{3} \qquad \therefore a=-1$$

(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{1}\neq\frac{0}{a+1} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$이므로 직선 ㉢이 점 $(-2, 1)$을 지나야 한다.

즉, $-2a+1+a+1=0$이므로 $a=2$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$(-1)\times\frac{1}{2}\times 2=-1$

답 $\mathbf{-1}$

1044 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx+y=-7$이 두 직선 $3x+y=8$, $2x+y=5$의 교점을 지나야 한다.

$3x+y=8$과 $2x+y=5$를 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-1$

따라서 직선 $kx+y=-7$이 점 $(3, -1)$을 지나야 하므로

$3k-1=-7 \qquad \therefore k=-2$

답 $\mathbf{-2}$

1045 $x+2y-6=0$ ...... ㉠

$4x-3y-12=0$ ...... ㉡

$ax+y-1=0$ ...... ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이려면 세 직선 중 어느 두 직선이 서로 수직이어야 한다.

직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-a$이므로 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 수직인 경우

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-a)=-1 \qquad \therefore a=-2$$

.... ㉮

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 수직인 경우

$$\frac{4}{3}\times(-a)=-1 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

.... ㉯

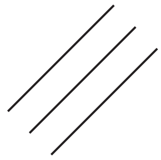
(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은 $-2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$

.... ㉰

답 $\mathbf{-\frac{5}{4}}$

단계	채점요소	배점
㉮	두 직선 ㉠, ㉢이 수직일 때 a의 값 구하기	40 %
㉯	두 직선 ㉡, ㉢이 수직일 때 a의 값 구하기	40 %
㉰	a의 값의 합 구하기	20 %

1046 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax+y+5=0$, $x+2y+3=0$이 평행하려면

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{5}{3} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

두 직선 $2x+by-4=0$, $x+2y+3=0$이 평행하려면

$$\frac{2}{1}=\frac{b}{2}\neq\frac{-4}{3} \qquad \therefore b=4$$

$\therefore a+b=\frac{9}{2}$

답 $\mathbf{\frac{9}{2}}$

1047 점 $(a, 3)$에서 두 직선 $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2a-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a+6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}, \ |2a-2|=|a+5|$$

$2a-2=\pm(a+5) \qquad \therefore a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$이므로 $a=7$

답 $\mathbf{7}$

1048 $\frac{|3\times2+4\times6+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8$이므로

$|30+k|=40$, $30+k=\pm40$

$\therefore k=10 \ (\because k>0)$

답 $\mathbf{10}$

1049 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$x+y-2+(x-y)k=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+y-2=0$, $x-y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1 \qquad \therefore \mathrm{A}(1, 1)$

점 $\mathrm{A}(1, 1)$과 직선 $2x-y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|2-1+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \ |1+b|=5, \ 1+b=\pm5$$

$\therefore b=4$ 또는 $b=-6$

따라서 모든 상수 b의 값의 합은 -2이다.

답 $\mathbf{-2}$

1050 주어진 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(2k+1)x+(k-2)y-4=0$

점 $(1, -2)$와 이 직선 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|(2k+1)+(k-2)\times(-2)-4|}{\sqrt{(2k+1)^2+(k-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5k^2+5}}$$

따라서 $\sqrt{5k^2+5}$가 최소, 즉 $k=0$일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 $\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

1051 두 직선이 평행하므로 직선 $x+2y+1=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리를 구하면

$\dfrac{|-1+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$, $|k-1|=20$, $k-1=\pm 20$

$\therefore k=21$ 또는 $k=-19$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 2이다. 답 ④

1052 두 직선이 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $x-y+3=0$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 $\mathbf{2\sqrt{2}}$

1053 두 직선 $ax+2y-1=0$, $3x+(a-1)y-1=0$이 평행하므로 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{a-1}\neq\dfrac{-1}{-1}$

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{a-1}$에서 $a(a-1)=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $\dfrac{a}{3}\neq\dfrac{-1}{-1}$에서 $a\neq3$이므로 $a=-2$

$a=-2$일 때, 두 직선의 방정식은

$-2x+2y-1=0$, $3x-3y-1=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $-2x+2y-1=0$ 위의 점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$과 직선 $3x-3y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{\left|0-\dfrac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$ 답 $\mathbf{\dfrac{5\sqrt{2}}{12}}$

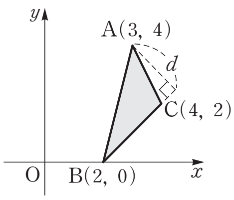
1054 두 직선 $x-y+7=0$, $x+ay-1=0$이 평행하므로

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-1}{a}\neq\dfrac{7}{-1}$에서 $a=-1$

정사각형의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같고 직선 $x-y-1=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $x-y+7=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0+1+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $4\sqrt{2}$이므로 그 넓이는 $(4\sqrt{2})^2=32$ 답 **32**

1055 $\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2}$
$=2\sqrt{2}$



직선 BC의 방정식은

$y-0=\dfrac{2-0}{4-2}(x-2)$

$\therefore x-y-2=0$

점 A$(3,\ 4)$와 직선 BC 사이의 거리를 d라 하면

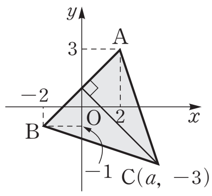
$d=\dfrac{|3-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=3$ 답 **3**

1056 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(-2,\ -1)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은



$y+1=\dfrac{3-(-1)}{2-(-2)}(x+2)$

$\therefore x-y+1=0$

점 C$(a,\ -3)$과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|a+3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4+a|}{\sqrt{2}}$

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=16$

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\dfrac{|4+a|}{\sqrt{2}}=16$

$|4+a|=8$, $4+a=\pm8$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-12$

따라서 자연수 a의 값은 4이다. 답 **4**

1057 직선 OA와 직선 $x-4y+12=0$의 기울기가 $\dfrac{1}{4}$로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 하면 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

이고, 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의 거리는

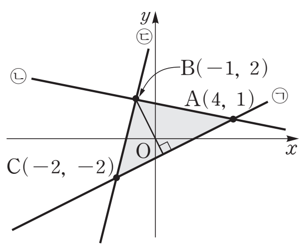
$\dfrac{|12|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{17}}$

$\therefore \triangle OAP=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\dfrac{12}{\sqrt{17}}=6$ 답 **6**

1058 $x-2y-2=0$ $\cdots$ ㉠

$x+5y-9=0$ $\cdots$ ㉡

$4x-y+6=0$ $\cdots$ ㉢



㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=1$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=2$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-2$

따라서 세 직선의 교점의 좌표는

A$(4,\ 1)$, B$(-1,\ 2)$, C$(-2,\ -2)$

·· ㉮

세 점으로 만들어진 삼각형의 한 변 AC의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{5}$

·· ㉯

이고, 높이는 점 B$(-1,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리이므로

$\dfrac{|-1-4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

·· ㉰

따라서 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{21}{2}$ ······ ㉣

답 $\frac{21}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	세 직선의 교점의 좌표 구하기	30 %
㉯	삼각형의 한 변의 길이 구하기	20 %
㉰	삼각형의 높이 구하기	30 %
㉣	삼각형의 넓이 구하기	20 %

유형 up

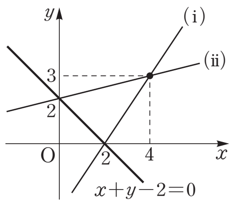
본문 149쪽

1059 $mx-y-4m+3=0$에서

$m(x-4)-(y-3)=0$ ······ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(4, 3)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$-2m+3=0 \quad \therefore m=\frac{3}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때

$-4m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$

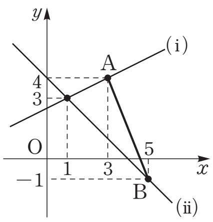
(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$\frac{1}{4}<m<\frac{3}{2}$

답 $\frac{1}{4}<m<\frac{3}{2}$

1060 직선 $y=m(x-1)+3$은 m의 값에 관계없이 점 $(1, 3)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 직선이 두 점 A, B 사이를 지나도록 움직여 보면



(i) 직선이 점 A$(3, 4)$를 지날 때

$4=2m+3 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선이 점 B$(5, -1)$을 지날 때

$-1=4m+3 \quad \therefore m=-1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-1<m<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$

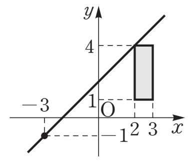
답 ②

1061 $kx-y+3k-1=0$에서

$(x+3)k-(y+1)=0$ ······ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 점 $(-3, -1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠을 직사각형과 만나도록 움직여 보면 k의 값은 직선 ㉠의 기울기이므로 점 $(2, 4)$를 지날 때 최대이다.



㉠에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$5k-5=0 \quad \therefore k=1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

답 1

1062 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$|x+2y+1|=|2x-y-3|$, $x+2y+1=\pm(2x-y-3)$

$\therefore x-3y-4=0$ 또는 $3x+y-2=0$

따라서 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

1063 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(2, 1)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|4+3+a|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|4-3+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$, $|7+a|=2$

$7+a=\pm 2 \quad \therefore a=-5$ 또는 $a=-9$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -14이다.

답 -14

1064 P(x, y)라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=2\overline{\mathrm{PS}}$이므로

$\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\times\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$2x+y-2=\pm 2(x+2y-2)$

$\therefore y=\frac{2}{3}$ 또는 $4x+5y-6=0$

답 $y=\frac{2}{3}$ 또는 $4x+5y-6=0$

시험에 꼭 나오는 문제

본문 150~153쪽

1065 구하는 직선은 (기울기)$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

점 $(\sqrt{3}, -1)$을 지나므로

$y+1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

1066 직선 AC의 방정식은

$y-5=\frac{-3-5}{5-1}(x-1) \quad \therefore y=-2x+7$ ······ ㉠

직선 OB의 방정식은 $y=0$ ······ ㉡

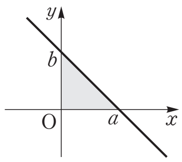
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{7}{2}$, $y=0$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$이다.

답 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

1067 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$에서 x절편은 a, y절편은 b이다.

이때 이 직선이 제3사분면을 지나지 않으므로 $a>0$, $b>0$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



어두운 부분의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}ab=9$ $\quad \therefore ab=18$

답 18

1068 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다.

(직선 AB의 기울기)$=\frac{3-5}{-1-k}=\frac{2}{k+1}$

(직선 BC의 기울기)$=\frac{-1-3}{-k-(-1)}=\frac{4}{k-1}$

즉, $\frac{2}{k+1}=\frac{4}{k-1}$이므로 $2k-2=4k+4$

$\therefore k=-3$

답 ③

1069 ㄱ. 세 점 A$(-1, 5)$, B$(2, 9)$, C$(4, 15)$에서

(직선 AB의 기울기)$=\frac{9-5}{2-(-1)}=\frac{4}{3}$

(직선 BC의 기울기)$=\frac{15-9}{4-2}=3$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

ㄴ. 세 점 A$(1, -1)$, B$(3, -5)$, C$(4, -7)$에서

(직선 AB의 기울기)$=\frac{-5-(-1)}{3-1}=-2$

(직선 BC의 기울기)$=\frac{-7-(-5)}{4-3}=-2$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

ㄷ. 세 점 A$(2, 0)$, B$(3, 4)$, C$(4, 6)$에서

(직선 AB의 기울기)$=\frac{4-0}{3-2}=4$

(직선 BC의 기울기)$=\frac{6-4}{4-3}=2$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

따라서 세 점이 한 직선 위에 있는 것은 ㄴ뿐이다.

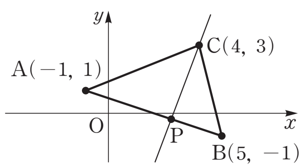
답 ㄴ

1070 $\triangle$APC : $\triangle$PBC$=2:1$이므로

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$

즉, 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(3, -\frac{1}{3}\right)$



따라서 두 점 C, P를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-\frac{1}{3}-3}{3-4}(x-4)$

$\therefore 10x-3y-31=0$

답 ③

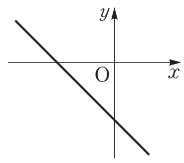
1071 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\quad \therefore ac<0$

$bx-cy+a=0$에서 $y=\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}<0$, $\frac{a}{c}<0$이므로 직선 $bx-cy+a=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx-cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



답 ①

1072 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y+4)k+(-x-y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-2y+4=0$, $x+y-a=0$

이때 점 $(2, b)$가 위의 두 직선의 교점이므로

$2-2b+4=0$, $2+b-a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

$\therefore a+b=8$

답 ⑤

1073 ㄱ. 주어진 직선은 두 직선 $x+2y-1=0$, $3x-y+1=0$, 즉 $x+2y=1$, $3x-y=-1$의 교점을 지나는 직선이다.

ㄴ. $k=2$이면 $x+2y-1+2(3x-y+1)=0$

$7x+1=0$ $\quad \therefore x=-\frac{1}{7}$

이때 직선 $x=-\frac{1}{7}$의 기울기는 존재하지 않는다.

ㄷ. $x+2y-1+k(3x-y+1)=0$에서

$(3k+1)x+(-k+2)y+k-1=0$

$-k+2=0$, 즉 $k=2$이면 $x=-\frac{1}{7}$이므로 y축에 평행한 직선이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1074 두 직선 l, m이 수직이므로

$1\times4+(-a)\times b=0$ $\quad \therefore ab=4$

두 직선 l, n이 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{-a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{-2}$에서 $a=b-3$ $\quad \therefore a-b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2\times4=17$

답 17

1075 $\angle ABO=\angle BCO$에서

$$\begin{aligned}\angle ABC&=\angle ABO+\angle OBC\\&=\angle BCO+\angle OBC\\&=90^\circ\end{aligned}$$

이므로 직선 l은 직선 m에 수직이다.

이때 직선 l의 기울기는

$$\frac{6-0}{0-(-8)}=\frac{3}{4}$$

이므로 직선 m의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

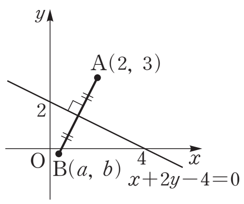
직선 m은 점 $B(-8, 0)$을 지나므로 직선 m의 방정식은

$$y=-\frac{4}{3}(x+8)$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x-\frac{32}{3}$$

답 $\mathbf{y=-\frac{4}{3}x-\frac{32}{3}}$

1076 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 선분 AB와 직선 $x+2y-4=0$이 서로 수직이므로



$$\frac{b-3}{a-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$\therefore 2a-b=1$ ······ ㉠

또, 직선 $x+2y-4=0$은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$을 지나므로

$$\frac{a+2}{2}+2\times\frac{b+3}{2}-4=0$$

$\therefore a+2b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$

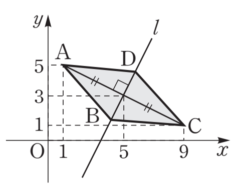
따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$이다.

답 $\mathbf{\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)}$

1077 □ABCD는 마름모이므로 두 점 B, D를 지나는 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\frac{1-5}{9-1}=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 l은 선분 AC의 중점 $\left(\frac{1+9}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 $(5, 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선이므로



$y-3=2(x-5)$

$\therefore 2x-y-7=0$

즉, $a=-1$, $b=-7$이므로

$ab=7$

답 ③

1078 두 직선 $4x+y-3=0$, $3x-2y+5=0$은 한 점에서 만난다.

(i) 직선 $ax+2y+4=0$이 직선 $4x+y-3=0$과 평행한 경우

$\frac{4}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{4}$에서 $a=8$

(ii) 직선 $ax+2y+4=0$이 직선 $3x-2y+5=0$과 평행한 경우

$\frac{3}{a}=\frac{-2}{2}\neq\frac{5}{4}$에서 $a=-3$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -3, 8이다.

답 **−3, 8**

1079 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $3x-y+5=0$, $ax+2y-1=0$이 평행하려면

$\frac{3}{a}=\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{-1}$ $\therefore a=-6$

두 직선 $3x-y+5=0$, $x+by+7=0$이 평행하려면

$\frac{3}{1}=\frac{-1}{b}\neq\frac{5}{7}$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=2$

답 **2**

1080 두 직선 $x+y+1=0$, $2x-y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x+y+1+k(2x-y)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (2k+1)x+(1-k)y+1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{(2k+1)^2+(1-k)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5k^2+2k+2}}$$

이므로 $\sqrt{5k^2+2k+2}$가 최소일 때, 최댓값을 갖는다.

$$5k^2+2k+2=5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\geq\frac{9}{5}$$

이므로 구하는 최댓값은 $k=-\frac{1}{5}$일 때

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

1081 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x+y-3+k(x-y-1)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (k+1)x+(1-k)y-k-3=0$ ······ ㉠

점 $(5, 3)$과 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5(k+1)+3(1-k)-k-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=2$$

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{2k^2+2}}=2,\ |k+5|=2\sqrt{2k^2+2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$7k^2-10k-17=0$, $(k+1)(7k-17)=0$

직선의 기울기가 0이 아니려면 ㉠에서 $k\neq-1$이므로

$k=\frac{17}{7}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{24}{7}x-\frac{10}{7}y-\frac{38}{7}=0$

$\therefore 12x-5y-19=0$

답 ③

1082 직선 $3x+4y=8$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 $3x+4y=k$, 즉 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로

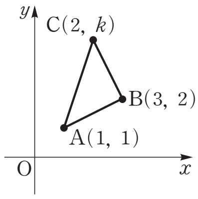
$$\frac{|0+8-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4,\ |8-k|=20$$

$8-k=\pm20$ $\quad\therefore k=-12$ 또는 $k=28$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 16이다.

답 **16**

1083 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$ 사이의 거리는



$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{2-1}{3-1}(x-1)$$

$\therefore x-2y+1=0$

점 $\mathrm{C}(2,\ k)$와 직선 AB, 즉 $x-2y+1=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|2-2k+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}$$

이때 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 $\frac{5}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$$

$|3-2k|=5,\ 3-2k=\pm5$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 3이다.

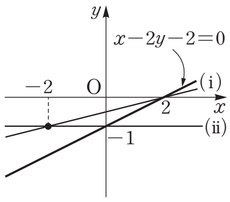
답 ②

1084 $mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선이 제 4 사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$4m-1=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ -1)$을 지날 때

$2m=0$ $\quad\therefore m=0$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$0<m<\frac{1}{4}$

답 $\mathbf{0<m<\frac{1}{4}}$

1085 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+4y+3|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|4x+y+12|}{\sqrt{4^2+1^2}}$$

$|x+4y+3|=|4x+y+12|$

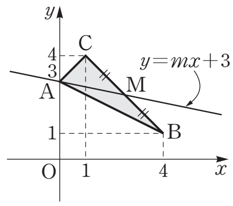
$x+4y+3=\pm(4x+y+12)$

$\therefore x-y+3=0$ 또는 $x+y+3=0$

이 중 기울기가 양수인 것은 $x-y+3=0$이다.

답 ③

1086 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+3$은 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$을 지나고, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 변 BC의 중점을 지나야 한다. ㉮



선분 BC의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{4+1}{2},\ \frac{1+4}{2}\right)\qquad\therefore \mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

㉯

직선 $y=mx+3$이 점 M을 지나므로

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}m+3$$

$$\therefore m=-\frac{1}{5}$$

㉰

답 $\mathbf{-\frac{1}{5}}$

단계	채점요소	배점
㉮	직선 $y=mx+3$이 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지남을 알기	40 %
㉯	$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표 구하기	30 %
㉰	m의 값 구하기	30 %

1087 $(a+1)x-(a-3)y+a-15=0$을 a에 대하여 정리하면

$(x-y+1)a+x+3y-15=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x-y+1=0,\ x+3y-15=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=4$

$\therefore \mathrm{A}(3,\ 4)$

㉮

점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$와 직선 $2x-y+p=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|6-4+p|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |2+p|=5$$

$2+p=\pm5$ $\quad\therefore p=3$ 또는 $p=-7$

따라서 모든 실수 p의 값의 합은 -4이다.

㉯

답 **−4**

단계	채점요소	배점
㉮	점 A의 좌표 구하기	40 %
㉯	모든 실수 p의 값의 합 구하기	60 %

1088 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $3x-by+1=0$과 수직이므로

$1\times3+a\times(-b)=0$

$\therefore ab=3$

㉮

또, 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $x-(b+2)y-1=0$과 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+2)}\neq\frac{1}{-1}$

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+2)}$에서 $-b-2=a$ $\quad\therefore a+b=-2$

……………… ㉯

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-2)^3-3\times3\times(-2)$
$=-8+18=10$

……………… ㉰

답 **10**

단계	채점요소	배점
㉮	수직 조건을 이용하여 ab의 값 구하기	40 %
㉯	평행 조건을 이용하여 $a+b$의 값 구하기	40 %
㉰	a^3+b^3의 값 구하기	20 %

1089 어느 두 직선도 서로 평행하지 않은 세 직선

$x-y+a=0$ …… ㉠
$2x-y+1=0$ …… ㉡
$3x-2y-a=0$ …… ㉢

이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

……………… ㉮

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=a-1,\ y=2a-1$
따라서 세 직선은 점 $(a-1,\ 2a-1)$을 지나야 한다.

……………… ㉯

직선 ㉢이 점 $(a-1,\ 2a-1)$을 지나야 하므로
$3(a-1)-2(2a-1)-a=0$
$-2a-1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

……………… ㉰

답 $-\frac{1}{2}$

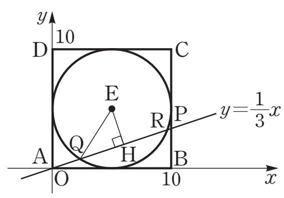
단계	채점요소	배점
㉮	세 직선의 위치 관계 구하기	30 %
㉯	두 직선의 교점의 좌표 구하기	30 %
㉰	a의 값 구하기	40 %

1090 $x+2y-3=0$ …… ㉠
$y=1$ …… ㉡
$x-y+6=0$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 A$(-3,\ 3)$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 B$(-5,\ 1)$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 C$(1,\ 1)$
삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선의 교점이다.
변 BC의 중점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이므로 변 BC의 수직이등분선의 방정식은
$x=-2$ …… ㉣
변 AB의 중점의 좌표가 $(-4,\ 2)$이고 직선 AB, 즉 $x-y+6=0$의 기울기가 1이므로 변 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-2=-(x+4)$ $\quad\therefore y=-x-2$ …… ㉤
㉣, ㉤을 연립하여 풀면
$x=-2,\ y=0$
따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(-2,\ 0)$이므로
점 $(-2,\ 0)$과 직선 $x-y+6=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-2-0+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

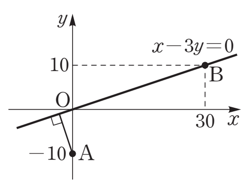
1091 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점으로 하고 선분 AB가 x축 위에 있도록 좌표평면 위에 정사각형 ABCD를 놓으면



$\overline{AB}=\overline{BC}$이고 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:2$이므로
$\overline{AB}:\overline{BP}=\overline{BC}:\overline{BP}=3:1$
따라서 직선 AP의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$
이때 원의 중심을 E라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 E$(5,\ 5)$
점 E에서 직선 $y=\frac{1}{3}x$, 즉 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{EH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
직각삼각형 EQH에서 $\overline{EQ}=5$이므로
$5^2=\overline{QH}^2+(\sqrt{10})^2,\ \overline{QH}^2=15$ $\quad\therefore \overline{QH}=\sqrt{15}$
$\therefore \overline{QR}=2\overline{QH}=2\sqrt{15}$

답 ⑤

1092 교차로의 한 지점을 원점으로 하여 주어진 그림을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 지점 A, B의 좌표는
A$(0,\ -10)$, B$(30,\ 10)$이고
원점과 점 B를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{3}x$ $\quad\therefore x-3y=0$
A 지점에 있는 사람이 B 지점에 있는 사람을 보기 위해 움직여야 할 최단 거리는 점 A$(0,\ -10)$과 직선 $x-3y=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 최단 거리는
$\frac{|0+30|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$ (m)

답 $3\sqrt{10}$ **m**

12 원의 방정식

교과서 문제 정/복/하/기

본문 155쪽

1093 답 중심의 좌표: $(4, 1)$, 반지름의 길이: 5

1094 답 중심의 좌표: $(0, 3)$, 반지름의 길이: 3

1095 $x^2+y^2-4x=0$에서 $(x-2)^2+y^2=4$
따라서 중심의 좌표는 $(2, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 중심의 좌표: $(2, 0)$, 반지름의 길이: 2

1096 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$에서 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
따라서 중심의 좌표는 $(1, 3)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 중심의 좌표: $(1, 3)$, 반지름의 길이: 2

1097 중심의 좌표가 $(2, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로
$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

1098 중심의 좌표가 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$ 답 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

1099 답 $x^2+y^2=9$

1100 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$

1101 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 점 $(-3, 2)$이므로
$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$1^2+(-2)^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

1102 x축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 y좌표의 절댓값인 3이다.
$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=9$ 답 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

1103 y축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x좌표의 절댓값인 4이다.
$\therefore (x-4)^2+(y+1)^2=16$ 답 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$

1104 x축, y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x좌표(또는 y좌표)의 절댓값인 2이다.
$\therefore (x+2)^2+(y+2)^2=4$ 답 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

1105 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-6x-8y+9)=0$
$\therefore 6x+8y-13=0$ 답 $6x+8y-13=0$

1106 $(x-4)^2+(y-2)^2=9$에서
$x^2+y^2-8x-4y+11=0$
따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-8x-4y+11)=0$
$8x+4y-20=0$ $\quad\therefore 2x+y-5=0$ 답 $2x+y-5=0$

1107 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4y+k(x^2+y^2-2x)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠
이 원이 점 $(2, 3)$을 지나므로
$4+9-12+k(4+9-4)=0$
$9k+1=0$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{9}$
$k=-\dfrac{1}{9}$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-4y-\dfrac{1}{9}(x^2+y^2-2x)=0$
$9x^2+9y^2-36y-x^2-y^2+2x=0$
$8x^2+8y^2+2x-36y=0$
$\therefore x^2+y^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{9}{2}y=0$ 답 $x^2+y^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{9}{2}y=0$

1108 $x-y+3=0$에서 $y=x+3$
$y=x+3$을 $x^2+y^2=36$에 대입하면
$x^2+(x+3)^2=36$ $\quad\therefore 2x^2+6x-27=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=3^2-2\times(-27)=63>0$
따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.
답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1109 $x-2y-1=0$에서 $x=2y+1$
$x=2y+1$을 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에 대입하면
$(2y+1)^2+y^2+4(2y+1)-2y+4=0$
$\therefore 5y^2+10y+9=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=5^2-5\times9=-20<0$
따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

1110 원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\times1-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 5이고 $\sqrt{5}<5$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 즉, 교점의 개수는 2이다.
답 2

1111 $x^2+y^2-8x+6y+9=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=16$

원의 중심 $(4,\ -3)$과 직선 $3x+y+11=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\times4+(-3)+11|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

이때 원의 반지름의 길이가 4이고 $2\sqrt{10}>4$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 즉, 교점의 개수는 0이다. 답 **0**

1112 $y=2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{2^2+1}$ $\therefore y=2x\pm5$

답 $\boldsymbol{y=2x+5,\ y=2x-5}$

1113 답 $\boldsymbol{x+\sqrt{3}y=4}$

유형 익/히/기

본문 156～164쪽

1114 중심이 x축 위에 있으므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+y^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

$a^2+16=r^2$, $(1-a)^2+9=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 ④

1115 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(5,\ 1)$을 지나므로

$(5-3)^2+(1+2)^2=r^2$ $\therefore r^2=13$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi r^2=\pi\times13=13\pi$ 답 $\boldsymbol{13\pi}$

1116 중심이 y축 위에 있으므로 원의 방정식을

$x^2+(y-b)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$1+(2-b)^2=r^2$, $9+(4-b)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $b=5$, $r^2=10$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=10$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0,\ 5)$이다.

ㄴ. $3^2+(6-5)^2=10$이므로 점 $(3,\ 6)$을 지난다.

ㄷ. 넓이는 10π이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 **ㄱ, ㄴ**

1117 원의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$b=2a-1$ …… ㉠

원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(4-2a+1)^2=r^2$에서

$5a^2-22a+26=r^2$ …… ㉡

$(3-a)^2+(2-2a+1)^2=r^2$에서

$5a^2-18a+18=r^2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b+r^2=2+3+2=7$ 답 **7**

1118 원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$ $\therefore a=2,\ b=4$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(6-2)^2}=\sqrt{13}$ $\therefore r^2=13$

$\therefore a+b+r^2=19$ 답 **19**

1119 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{4+(-2)}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$이므로 이 원 위의 점인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

1120 $4x-5y+40=0$에

$y=0$을 대입하면 $4x+40=0$ $\therefore x=-10$

$x=0$을 대입하면 $-5y+40=0$ $\therefore y=8$

$\therefore$ P$(-10,\ 0)$, Q$(0,\ 8)$ …… ㉮

두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-10+0}{2},\ \dfrac{0+8}{2}\right)$, 즉 $(-5,\ 4)$ …… ㉯

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{0-(-10)\}^2+(8-0)^2}=\sqrt{41}$ …… ㉰

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+5)^2+(y-4)^2=41$ …… ㉱

답 $\boldsymbol{(x+5)^2+(y-4)^2=41}$

단계	채점요소	배점
㉮	점 P, Q의 좌표 구하기	20 %
㉯	원의 중심의 좌표 구하기	30 %
㉰	원의 반지름의 길이 구하기	30 %
㉱	원의 방정식 구하기	20 %

1121 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$에서
$(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$
이 방정식이 원을 나타내려면
$3-k>0 \qquad \therefore k<3$
따라서 정수 k의 최댓값은 2이다. 답 **2**

1122 ① $x^2+y^2+6x=0$에서 $(x+3)^2+y^2=9$
② $x^2+y^2+2x-8y-8=0$에서 $(x+1)^2+(y-4)^2=25$
③ $x^2+y^2+x+y+1=0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}<0$이므로 원이 아니다.
④ $x^2+y^2+4x+2y-1=0$에서 $(x+2)^2+(y+1)^2=6$
⑤ $x^2+y^2-2x+4y=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$
따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

1123 $x^2+y^2+2kx-5k^2-6k-4=0$에서
$(x+k)^2+y^2=6k^2+6k+4$
이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면
$0<6k^2+6k+4\le 4$
(i) $6k^2+6k+4>0$에서
$6\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$, 즉 k는 모든 실수이다.
(ii) $6k^2+6k+4\le 4$에서
$k^2+k\le 0$, $k(k+1)\le 0$
$\therefore -1\le k\le 0$
(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-1\le k\le 0$ 답 ②

1124 $x^2+y^2-4x+a^2-4a-1=0$에서
$(x-2)^2+y^2=-a^2+4a+5$
이 방정식이 원을 나타내므로
$-a^2+4a+5>0$, $a^2-4a-5<0$
$(a+1)(a-5)<0 \qquad \therefore -1<a<5$
이때 원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로
$-a^2+4a+5=-(a-2)^2+9$
따라서 $-1<a<5$에서 $a=2$일 때 반지름의 길이는 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$이다. 답 **3**

1125 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-3)^2+(b-4)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$
$\therefore a+5b=10$ …… ㉠
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-2)^2+(b+1)^2=(a+3)^2+b^2$
$\therefore 5a-b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$
즉, 원의 중심은 $P(0, 2)$
원의 반지름의 길이는
$\overline{PA}=\sqrt{(0-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$
이므로 $r=\sqrt{13}$
$\therefore a+b+r=2+\sqrt{13}$ 답 **$2+\sqrt{13}$**

1126 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a+5)^2+(b-0)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$
$\therefore 3a+b=-5$ …… ㉠
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+(b-4)^2$
$\therefore a+b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=10$
즉, 원의 중심은 $P(-5, 10)$이고, 반지름의 길이는
$\overline{PA}=\sqrt{\{-5-(-5)\}^2+(0-10)^2}=10$
따라서 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y-10)^2=100$
이때 점 $(k, 16)$이 이 원 위의 점이므로
$(k+5)^2+(16-10)^2=100$
$k^2+10k-39=0$, $(k+13)(k-3)=0$
$\therefore k=3$ ($\because k>0$) 답 ①

1127 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$
$\therefore a-b=0$ …… ㉠
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$
$2a=5 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$
$a=\frac{5}{2}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$
즉, 원의 중심은 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이는
$\overline{PA}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$
따라서 구하는 원의 넓이는
$\pi\times\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2}\pi$ 답 **$\frac{5}{2}\pi$**

1128 원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하자.
원이 x축에 접하므로 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$
이 원이 점 $(-1, -1)$을 지나므로
$(-1-a)^2+(-1-a-1)^2=(a+1)^2$
$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+1)^2=1$ 답 ④

1129 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 x축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나므로
$(1-a)^2+(1-b)^2=b^2$에서
$a^2-2a-2b+2=0$ …… ㉠
$(2-a)^2+(2-b)^2=b^2$에서
$a^2-4a-4b+8=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2,\ b=1$ 또는 $a=-2,\ b=5$
이때 원의 반지름의 길이는 $|b|$이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은
$1+5=6$
답 **6**

1130 $x^2+y^2-6x+2ky+10=0$에서
$(x-3)^2+(y+k)^2=k^2-1$
이 원이 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 같다.
즉, $3=\sqrt{k^2-1}$이므로
$k^2-1=9,\ k^2=10 \quad \therefore k=\pm\sqrt{10}$
이때 원의 중심이 제 4 사분면 위에 있으므로 $-k<0$, 즉 $k>0$
$\therefore k=\sqrt{10}$
답 $\sqrt{10}$

1131 원 $x^2+y^2+2ax-4y+b=0$이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로
$9+1+6a+4+b=0$
$\therefore 6a+b=-14$ …… ㉠
……… ㉮
$x^2+y^2+2ax-4y+b=0$에서
$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2-b+4$
……… ㉯
이 원이 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 같다.
즉, $|-a|=\sqrt{a^2-b+4}$이므로
$a^2=a^2-b+4 \quad \therefore b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a=-3$
……… ㉰
$\therefore a+b=1$
……… ㉱
답 **1**

단계	채점요소	배점
㉮	원이 점 $(3,\ -1)$을 지남을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 세우기	20 %
㉯	원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$의 꼴로 나타내기	20 %
㉰	$a,\ b$의 값 구하기	40 %
㉱	$a+b$의 값 구하기	20 %

1132 점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제 1 사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.
따라서 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
으로 놓으면 이 원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$
$(r-1)(r-5)=0 \quad \therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(1,\ 1)$, $(5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$
답 $4\sqrt{2}$

1133 중심의 좌표가 $(-2,\ 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$
이 원이 점 $(-4,\ a)$를 지나므로 $4+(a-2)^2=4$
$(a-2)^2=0 \quad \therefore a=2$
답 **2**

1134 제 4 사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.
이때 원의 중심 $(r,\ -r)$가 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로
$r-(-r)-2=0,\ 2r=2 \quad \therefore r=1$
따라서 구하는 원의 넓이는
$\pi\times1^2=\pi$
답 π

1135 $x^2+y^2+4x+2ay+10-b=0$에서
$(x+2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 y좌표의 절댓값, 반지름의 길이가 모두 같다.
즉, $|-2|=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$이므로
$a=2,\ b=6\ (\because a>0,\ b>0)$
$\therefore a+b=8$
답 ④

1136 $x^2+y^2-4x+8y+4=0$에서
$(x-2)^2+(y+4)^2=16$
점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$과 원의 중심 $(2,\ -4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(-2-2)^2+\{1-(-4)\}^2}=\sqrt{41}$
이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 선분 AP의 길이의 최댓값은 $\sqrt{41}+4$, 최솟값은 $\sqrt{41}-4$이다.
$\therefore M=\sqrt{41}+4,\ m=\sqrt{41}-4$
$\therefore Mm=(\sqrt{41}+4)(\sqrt{41}-4)=25$
답 ④

1137 점 $(3,\ -6)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$
이고, 원의 반지름의 길이는 r이므로 점 $(3,\ -6)$에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $3\sqrt{5}+r$이다.

즉, $3\sqrt{5}+r=4\sqrt{5}$이므로

$r=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

1138 $\sqrt{(a+4)^2+(b-3)^2}$의 값은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a, b)$와 점 $(-4, 3)$ 사이의 거리와 같다.

점 $(-4, 3)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\sqrt{(a+4)^2+(b-3)^2}$의 최댓값은

$5+2=7$ 답 ③

1139 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-8x-(x^2+y^2-6x-4y+3)=0$

$2x-4y+3=0 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

이 직선이 $y=ax+6$과 수직이므로

$\frac{1}{2}\times a=-1 \qquad \therefore a=-2$ 답 -2

1140 $(x-2)^2+y^2=10$에서 $x^2+y^2-4x-6=0$이므로

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$

$4x+y+1=0 \qquad \therefore y=-4x-1$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로

$a+b=-5$ 답 ①

1141 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-(x^2+y^2-2x+y)=0$

$3x-y=0 \qquad \therefore y=3x$

따라서 기울기가 3이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

1142 원 $x^2+y^2+ax+2y-3a=0$이

원 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$의 중심을 지나야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+2y-3a-(x^2+y^2+2x-2y-2)=0$

$\therefore (a-2)x+4y-3a+2=0$ …… ㉠

또, $x^2+y^2+2x-2y-2=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=4$ …… ㉡

따라서 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-1, 1)$을 지나야 하므로

$-(a-2)+4-3a+2=0$

$4a=8 \qquad \therefore a=2$ 답 2

1143 $x^2+y^2=1$에서 $x^2+y^2-1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$9+1-1+k(9+1-6-2+1)=0$

$9+3k=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-1-3(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$

$\therefore x^2+y^2-3x-3y+2=0$

따라서 $A=-3$, $B=-3$, $C=2$이므로

$A+B+C=-4$ 답 -4

1144 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x+2+k(x^2+y^2-2x-8y+4)=0$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1-6+2+k(1-2+4)=0$

$-3+3k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+2+(x^2+y^2-2x-8y+4)=0$

$x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=5$

따라서 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$ 답 5π

1145 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6y+4+k(x^2+y^2+ax-4y+2)=0$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$4+2k=0 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6y+4-2(x^2+y^2+ax-4y+2)=0$

$x^2+y^2+2ax-2y=0$

$\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+1$

이때 이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+1}$이고 넓이가 10π이므로

$\pi\times(\sqrt{a^2+1})^2=10\pi$

$a^2+1=10$, $a^2=9$

$\therefore a=3 \ (\because a>0)$ 답 3

1146 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+4y-8+k(x^2+y^2+4x-8y-14)=0$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(-8+4k)x$

$+(4-8k)y-8-14k=0$

이때 이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 x좌표는 0이다.

즉, x의 계수가 0이므로

$-8+4k=0 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-8x+4y-8+2(x^2+y^2+4x-8y-14)=0$

$x^2+y^2-4y-12=0$

$\therefore x^2+(y-2)^2=16$

따라서 원의 반지름의 길이가 4이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times4=8\pi$ 답 8π

1147 원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $y=2x-k$, 즉 $2x-y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-2-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\ |k+4|<5$$

$-5<k+4<5 \qquad \therefore -9<k<1$

따라서 정수 k는 $-8, -7, -6, \cdots, 0$의 9개이다. 답 ④

다른풀이 $y=2x-k$를 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$에 대입하면

$(x+1)^2+(2x-k-2)^2=5$

$x^2+2x+1+4x^2+k^2+4-4kx-8x+4k-5=0$

$\therefore 5x^2-(4k+6)x+k^2+4k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(2k+3)^2-5(k^2+4k)>0$$

$-k^2-8k+9>0,\ k^2+8k-9<0$

$(k+9)(k-1)<0 \qquad \therefore -9<k<1$

따라서 정수 k는 $-8, -7, -6, \cdots, 0$의 9개이다.

1148 원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $3x+4y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+12+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{8}{5}<\sqrt{a} \qquad \therefore a>\frac{64}{25}=2.56$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

1149 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m-0+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}<1,\ |m+1|<\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$m^2+2m+1<m^2+1,\ 2m<0$

$\therefore m<0$ 답 $m<0$

1150 원의 중심 $(2, 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\ |k-2|=2$$

$k-2=\pm2 \qquad \therefore k=4\ (\because k>0)$ 답 ④

다른풀이 $y=-x+k$를 $(x-2)^2+y^2=2$에 대입하면

$(x-2)^2+(-x+k)^2=2$

$\therefore 2x^2-(2k+4)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2+2)=0$$

$-k^2+4k=0,\ k(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k>0)$

1151 원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-6+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k-8|}{\sqrt{5}}$$

넓이가 5π인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-8|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},\ |k-8|=5$$

$k-8=\pm5 \qquad \therefore k=13$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$13+3=16$ 답 16

1152 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$

으로 놓으면 원의 중심 (a, a)와 직선 $5x+12y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5a+12a-8|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|17a-8|}{13}$$

원의 반지름의 길이가 a이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|17a-8|}{13}=a,\ |17a-8|=13a$$

$17a-8=\pm13a \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=\frac{4}{15}$

따라서 두 원 중 큰 원의 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$ 답 4π

1153 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $y=mx-2m$, 즉 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-m-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}>1$, $|3m|>\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2>m^2+1$, $m^2>\frac{1}{8}$

$\therefore m<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

다른풀이 $y=mx-2m$을 $(x+1)^2+y^2=1$에 대입하면

$(x+1)^2+(mx-2m)^2=1$

$\therefore (m^2+1)x^2-(4m^2-2)x+4m^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(2m^2-1)^2-4m^2(m^2+1)<0$

$-8m^2+1<0$, $m^2>\frac{1}{8}$

$\therefore m<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{2}}{4}$

1154 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}>1$, $|a-3|>\sqrt{2}$

$a-3<-\sqrt{2}$ 또는 $a-3>\sqrt{2}$

$\therefore a<3-\sqrt{2}$ 또는 $a>3+\sqrt{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

1155 주어진 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{-1-3}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -2)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

······························ ㉮

원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10}$, $|k+5|>10$

$k+5<-10$ 또는 $k+5>10$

$\therefore k<-15$ 또는 $k>5$

······························ ㉯

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

······························ ㉰

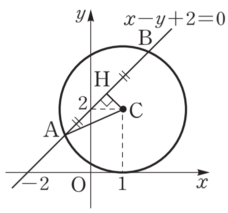
답 6

단계	채점요소	배점
㉮	원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
㉯	k의 값의 범위 구하기	40 %
㉰	자연수 k의 최솟값 구하기	20 %

1156 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(1, 2)라 하고, 점 C에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{14}$ 답 $\sqrt{14}$

1157 원 $x^2+y^2-4x+10y+9=0$이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $x=0$을 대입하면

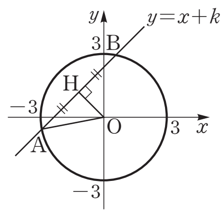
$y^2+10y+9=0$, $(y+9)(y+1)=0$

$\therefore y=-9$ 또는 $y=-1$

따라서 주어진 원이 y축과 만나는 두 점은 $(0,\ -9)$, $(0,\ -1)$이므로 구하는 현의 길이는

$|-1-(-9)|=8$ 답 8

1158 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $y=x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AB}=4\sqrt{2}$에서 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 OAH에서

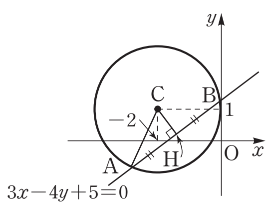
$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$ ······ ㉠

또, 점 O(0, 0)과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}=1$이므로 $|k|=\sqrt{2}$

$\therefore k=\sqrt{2}$ ($\because k>0$) 답 ②

1159 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다.



······························ ㉮

원의 중심 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$에서 직선 $3x-4y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|-6-4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$$

㉯

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

㉰

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$$

㉱

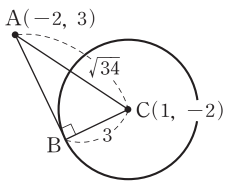
답 3π

단계	채점요소	배점
㉮	$\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	30 %
㉯	$\overline{\mathrm{CH}}$의 길이 구하기	30 %
㉰	$\overline{\mathrm{AH}}$의 길이 구하기	30 %
㉱	넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10 %

1160 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ -2)$와 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$ 사이의 거리는



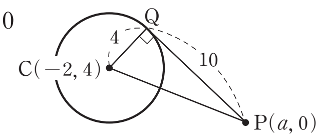
$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-2-1)^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{34}$$

△ABC는 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CB}}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$$

답 ④

1161 $x^2+y^2+4x-8y+4=0$ 에서



$(x+2)^2+(y-4)^2=16$

원의 중심 $\mathrm{C}(-2,\ 4)$와 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(0-4)^2}=\sqrt{a^2+4a+20}$$

접점을 Q라 하면 △CPQ는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2$에서

$a^2+4a+20=4^2+10^2,\ a^2+4a-96=0$

$(a-8)(a+12)=0 \qquad \therefore a=8\ (\because a>0)$

답 ③

1162 △OAP는 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

이때 △OAP≡△OBP(RHS 합동)이므로 사각형 OAPB의 넓이는

$$2\times\triangle\mathrm{OAP}=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\right)=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

1163 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=8$

원의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이고, 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

$$a=\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore a+b=5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

1164 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

이고, 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 최단 거리는

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

답 ②

1165 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

㉮

이고, 원의 반지름의 길이는 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|k|}{5}+2=5,\ |k|=15$$

$\therefore k=15\ (\because k>0)$

㉯

답 15

단계	채점요소	배점
㉮	원의 중심과 주어진 직선 사이의 거리 구하기	40 %
㉯	k의 값 구하기	60 %

1166 $x^2+y^2-10x+6y+25=0$에서

$(x-5)^2+(y+3)^2=9$

원의 중심 $(5,\ -3)$과 직선 $x+2y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-6-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-3\le d\le2\sqrt{5}+3$

이때 $4<2\sqrt{5}<5$이므로 d가 될 수 있는 정수는 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 12이다.

답 12

1167 직선 $x+2\sqrt{2}y-8=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $2\sqrt{2}$이다.
원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 $2\sqrt{2}$인 접선의 방정식은
$y=2\sqrt{2}x\pm3\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}$
$\therefore y=2\sqrt{2}x+9$ 또는 $y=2\sqrt{2}x-9$
이 두 직선의 y절편은 각각 9, -9이므로
$\overline{PQ}=|9-(-9)|=18$ 답 ④

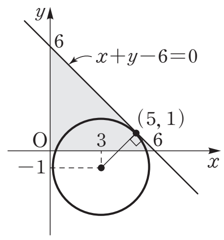
1168 기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+b$로 놓으면 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $y=2x+b$, 즉 $2x-y+b=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로
$\frac{|2+2+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$, $|b+4|=2\sqrt{5}$
$b+4=\pm2\sqrt{5}$ $\therefore b=-4\pm2\sqrt{5}$
이때 b가 y절편이므로 y절편의 곱은
$(-4+2\sqrt{5})\times(-4-2\sqrt{5})=-4$ 답 ①

1169 $x^2+y^2-6x+2y+8=0$에서
$(x-3)^2+(y+1)^2=2$
기울기가 $\tan 45°$, 즉 1인 접선의 방정식을 $y=x+b$로 놓으면 원의 중심 $(3,\ -1)$과 접선 $y=x+b$, 즉 $x-y+b=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로
$\frac{|3+1+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|b+4|=2$
$b+4=\pm2$ $\therefore b=-2$ 또는 $b=-6$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=x-2$ 또는 $y=x-6$ 답 $y=x-2$ 또는 $y=x-6$

1170 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax+by=20$ $\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$
이 접선의 기울기가 3이므로
$-\frac{a}{b}=3$ $\therefore a=-3b$ …… ㉠
또, 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ 또는 $a=3\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$
$\therefore ab=-6$ 답 ②

1171 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3,\ a)$에서의 접선의 방정식은
$-3x+ay=25$
이 접선이 점 $(5,\ b)$를 지나므로
$-15+ab=25$ $\therefore ab=40$ …… ㉠
또, 점 $(-3,\ a)$는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로
$9+a^2=25$, $a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=10$
$\therefore a+b=14$ 답 14

1172 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=8$ 위의 점 $(5,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$(5-3)(x-3)+(1+1)(y+1)=8$
$\therefore x+y-6=0$
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times6=18$



답 18

다른풀이 원의 중심 $(3,\ -1)$과 점 $(5,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1-(-1)}{5-3}=1$
즉, 점 $(5,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은
$y-1=-(x-5)$ $\therefore y=-x+6$
따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times6=18$

1173 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$-2x+y=5$ $\therefore 2x-y+5=0$ …… ㉠
$x^2+y^2-6x-4y+a=0$에서
$(x-3)^2+(y-2)^2=13-a$ …… ㉡
직선 ㉠이 원 ㉡에 접하려면 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{13-a}$와 같아야 하므로
$\frac{|6-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{13-a}$
$\frac{9}{\sqrt{5}}=\sqrt{13-a}$, $\frac{81}{5}=13-a$
$\therefore a=-\frac{16}{5}$ 답 $-\frac{16}{5}$

1174 점 $(1,\ 2)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y-2=m(x-1)$ $\therefore mx-y-m+2=0$ …… ㉠
원과 직선 ㉠이 접하려면 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로
$\frac{|-2m-1-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$
$|1-3m|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$1-6m+9m^2=m^2+1$, $8m^2-6m=0$
$2m(4m-3)=0$ $\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{3}{4}$
따라서 두 접선의 기울기의 합은
$0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ 답 ②

1175 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(0,\ -2)$를 지난다.

직선 l의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=mx-2 \qquad \therefore\ mx-y-2=0$

원 O와 직선 l이 접하려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$\dfrac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |-2|=\sqrt{m^2+1}$

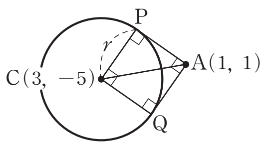
양변을 제곱하면 $4=m^2+1$

$m^2=3 \qquad \therefore\ m=\sqrt{3}\ (\because\ m>0)$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-2$ 답 $y=\sqrt{3}x-2$

1176 원의 중심을 $C(3,\ -5)$, 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.



따라서 직각삼각형 CAP에서

$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2$이므로

$(1-3)^2+\{1-(-5)\}^2=r^2+r^2,\ 2r^2=40$

$r^2=20 \qquad \therefore\ r=2\sqrt{5}\ (\because\ r>0)$ 답 $2\sqrt{5}$

유형 up

본문 165쪽

1177 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$(a+2)^2+(b+1)^2=4$ ······ ㉠

선분 AP의 중점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a+2}{2},\ y=\dfrac{b-1}{2}$

$\therefore\ a=2x-2,\ b=2y+1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x)^2+(2y+2)^2=4 \qquad \therefore\ x^2+(y+1)^2=1$

따라서 선분 AP의 중점의 자취는 중심이 $(0,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$ 답 2π

1178 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=16$에서

$(x+3)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=16$

$x^2+y^2+2x-3=0$

$\therefore\ (x+1)^2+y^2=4$ 답 ③

1179 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$이므로

$\overline{AP}=3\overline{BP} \qquad \therefore\ \overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

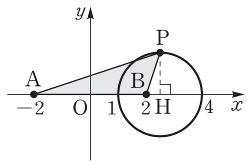
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$(x+2)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-5x+4=0 \qquad \therefore\ \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

따라서 점 P는 중심이 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$인 원 위의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

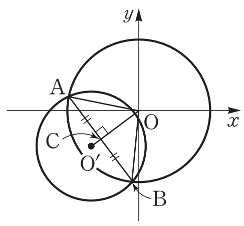


$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}$

이때 $\overline{AB}=4$이고 $\overline{PH}$의 길이의 최댓값은 반지름의 길이 $\dfrac{3}{2}$과 같으므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{3}{2}=3$ 답 ①

1180 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2+4x+3y+1=0$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2+4x+3y+1)=0$

$\therefore\ 4x+3y+10=0$

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $O(0,\ 0)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

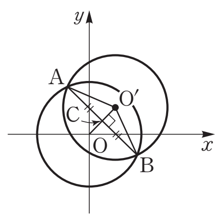
직각삼각형 AOC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

1181 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4,\ (x-1)^2+(y-1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-1)^2+(y-1)^2=4$에서

$x^2+y^2-2x-2y-2=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$

$\therefore\ x+y-1=0$

원 O'의 중심 $O'(1,\ 1)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{O'C}=\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 O′AC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{O'C}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

따라서 공통인 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AC}=\sqrt{14}$

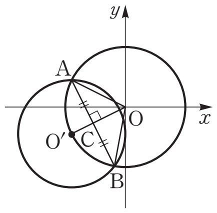
$\therefore \triangle O'AB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{O'C}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

1182 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

······ ㉮

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=5$, $(x+2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O', 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x+2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2+4x+2y+1=0$이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2+4x+2y+1)=0$

$\therefore 2x+y+3=0$

······ ㉯

원 $x^2+y^2=5$의 중심 O(0, 0)과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

직각삼각형 AOC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{5-\frac{9}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

······ ㉰

따라서 구하는 원의 넓이는

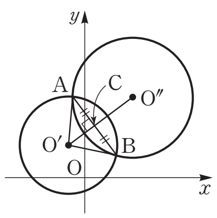
$\pi\times\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{16}{5}\pi$

······ ㉱

답 $\frac{16}{5}\pi$

단계	채점요소	배점
㉮	공통인 현을 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	20%
㉯	공통인 현의 방정식 구하기	30%
㉰	$\overline{AC}$의 길이 구하기	40%
㉱	넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10%

1183 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$, $x^2+y^2-6x-10y+2k=0$의 중심을 각각 O', O'', 두 원의 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2+2x-4y-4=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=9$이므로 원의 반지름의 길이는 3이다.

$\therefore \overline{O'A}=3$

한편, 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y-4-(x^2+y^2-6x-10y+2k)=0$

$\therefore 4x+3y-2-k=0$

원 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$의 중심 O'(−1, 2)와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{O'C}=\frac{|-4+6-2-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k|}{5}$

직각삼각형 AO'C에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{O'C}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{|k|}{5}\right)^2}$

이때 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$이어야 하므로

$2\overline{AC}=2\sqrt{5}$에서

$2\sqrt{3^2-\left(\frac{|k|}{5}\right)^2}=2\sqrt{5}$, $9-\frac{k^2}{25}=5$

$k^2=100$ $\therefore k=10$ ($\because k>0$) 답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

본문 166~169쪽

1184 $x^2+y^2-4x+ay-3=0$에서

$(x-2)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+7$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$\frac{a^2}{4}+7=16$, $a^2=36$ $\therefore a=\pm 6$

따라서 원의 중심의 좌표는 (2, −3) 또는 (2, 3)이므로 원점과 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

1185 직선 $y=2x+k$가 원 $(x+2)^2+(y+3)^2=20$의 둘레를 이등분하므로 직선은 원의 중심 (−2, −3)을 지난다.

즉, $-3=-4+k$이므로 $k=1$ 답 1

1186 원의 중심 (a, b)가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$b=a+1$ ······ ㉠

원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 (1, 6), (−3, 2)를 지나므로

$(1-a)^2+(5-a)^2=r^2$에서

$2a^2-12a+26=r^2$ ······ ㉡

$(-3-a)^2+(1-a)^2=r^2$에서

$2a^2+4a+10=r^2$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=16$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore 2a+b=4$ 답 ④

1187 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$

$\overline{AB}$를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times5-3\times1}{1-3}, \frac{1\times0-3\times0}{1-3}\right)$, 즉 $(-1, 0)$

두 점 $(3, 0)$, $(-1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(1, 0)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times|-1-3|=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=4$

답 ②

1188 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$에서

$(x+m-1)^2+(y-m)^2=(m-1)^2+m^2-3m^2+2$

즉, $(x+m-1)^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$

이 방정식이 원의 방정식이 되려면

$-m^2-2m+3>0$, $m^2+2m-3<0$

$(m+3)(m-1)<0$ $\quad\therefore -3<m<1$

따라서 정수 m은 -2, -1, 0의 3개이다.

답 ③

1189 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$에서

$-4a=0$ $\quad\therefore a=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-5)^2$에서

$a+b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=4$

즉, 원의 중심은 $P(0, 4)$이고, 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(0-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=10$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 4)$이다.

ㄴ. $0+(3-4)^2=1\neq10$이므로 주어진 원은 점 $(0, 3)$을 지나지 않는다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 넓이는 $\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1190 $x^2+y^2+4x-2y-10=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=15$

중심의 좌표가 $(-2, 1)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=1$

이므로 그 넓이는 $\pi\times1^2=\pi$ $\quad\therefore a=1$

또, 중심의 좌표가 $(-2, 1)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

이므로 그 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a-b=-3$

답 -3

1191 점 $(4, -2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제4사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(4, -2)$를 지나므로

$(4-r)^2+(-2+r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0$, $(r-2)(r-10)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=10$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$2+10=12$

답 ④

1192 점 $A(-4, a)$와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+a^2}=\sqrt{a^2+16}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은

$\sqrt{16+a^2}-2$이다.

즉, $\sqrt{16+a^2}-2=3$이므로

$\sqrt{16+a^2}=5$

양변을 제곱하면

$16+a^2=25$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 **3**

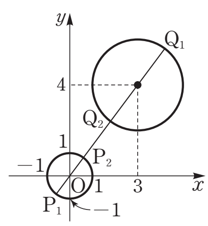
1193 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

두 원의 중심 $(0, 0)$과 $(3, 4)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이고,

두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 2이다.

오른쪽 그림에서 선분 PQ의 길이가 최대일 때는 $\overline{P_1Q_1}$일 때이고, 최소일 때는 $\overline{P_2Q_2}$일 때이므로



$M=\overline{P_1Q_1}=1+5+2=8$

$m=\overline{P_2Q_2}=5-1-2=2$

$\therefore M-m=6$

답 ③

1194 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$에서 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$이므로

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+4x-2y+1-(x^2+y^2-4)=0$

$\therefore 4x-2y+5=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 두 원의 중심 $(-2, 1)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 공통인 현의 중점의 좌표는 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$이다.

답 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

1195 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-ax+2ay+k(x^2+y^2-6)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 두 점 $(1,\ 1)$, $(4,\ -2)$를 지나므로

$2+a-4k=0$, $20-8a+14k=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $k=2$

$a=6$, $k=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+12y+2(x^2+y^2-6)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-2x+4y-4=0$

따라서 $A=-2$, $B=4$, $C=-4$이므로

$A-B-C=-2$ 답 ②

1196 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=9$

$\therefore\ 5x^2+4kx+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-9)=-k^2+45$

(ⅰ) $D>0$, 즉 $-k^2+45>0$일 때,

$k^2-45<0 \qquad \therefore\ -3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

따라서 $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$이면 교점은 2개이다.

(ⅱ) $D=0$, 즉 $-k^2+45=0$일 때,

$k^2-45=0 \qquad \therefore\ k=\pm3\sqrt{5}$

따라서 $k=\pm3\sqrt{5}$이면 교점은 1개이다.

(ⅲ) $D<0$, 즉 $-k^2+45<0$일 때,

$k^2-45>0 \qquad \therefore\ k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$

따라서 $k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$이면 교점은 없다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

1197 $y=x+k$를 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2-2x-4(x+k)+1=0$

$\therefore\ 2x^2+(2k-6)x+k^2-4k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(k-3)^2-2(k^2-4k+1)>0$

$-k^2+2k+7>0$, $k^2-2k-7<0$

$\therefore\ 1-2\sqrt{2}<k<1+2\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다. 답 ④

1198 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(t,\ 2t)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심과 두 직선 $x+2y-3=0$, $x+2y-7=0$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$r=\dfrac{|t+4t-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|t+4t-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ …… ㉠

$|5t-3|=|5t-7|$, $5t-3=\pm(5t-7)$

그런데 $5t-3\neq5t-7$이므로

$5t-3=-5t+7 \qquad \therefore\ t=1$

원의 중심의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 $a=1$, $b=2$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $r=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}\pi \qquad \therefore\ c=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ a+b+5c=1+2+5\times\dfrac{4}{5}=7$ 답 **7**

1199 원의 중심 $(a,\ 2)$와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|a+1|>4$

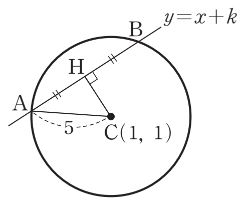
$a+1<-4$ 또는 $a+1>4$

$\therefore\ a<-5$ 또는 $a>3$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

1200 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 1)$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로



$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=4$

또, 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

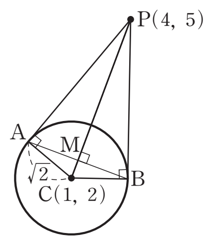
$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$이므로

$5^2=\left(\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}\right)^2+4^2$, $25=\dfrac{k^2}{2}+16$

$k^2=18 \qquad \therefore\ k=3\sqrt{2}\ (\because\ k>0)$ 답 ②

1201 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ 2)$와 점 $\mathrm{P}(4,\ 5)$ 사이의 거리는



$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{CAP}$는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$

$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{CP}}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CP}}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CP}}\times\overline{\mathrm{AM}}$에서

$\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{AM}} \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{8}{3}$ 답 $\dfrac{8}{3}$

1202 두 점 A$(0,\ 1)$, B$(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

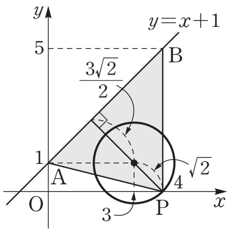
$y-1=\dfrac{5-1}{4-0}(x-0)\qquad \therefore\ y=x+1$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

또, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2=2$이므로 원의 중심 $(3,\ 1)$과 직선 $y=x+1$, 즉

$x-y+1=0$ 사이의 거리는



$\dfrac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 하는 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 높이는

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=10$

답 **10**

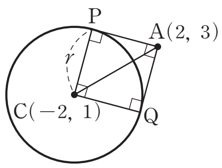
1203 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$이고 원 $x^2+y^2=12$에 접하는 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{12}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$\therefore\ y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$ 또는 $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$

답 $\boldsymbol{y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3}}$ **또는** $\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}}$

1204 원의 중심을 C$(-2,\ 1)$, 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 CQAP는 정사각형이다. 따라서 직각삼각형 CAP에서



$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2$이므로

$\{2-(-2)\}^2+(3-1)^2=r^2+r^2$

$r^2=10\qquad \therefore\ r=\sqrt{10}\ (\because\ r>0)$

답 ①

1205 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=3:2$에서 $2\overline{\mathrm{PA}}=3\overline{\mathrm{PB}}$, $4\overline{\mathrm{PA}}^2=9\overline{\mathrm{PB}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$4\{(x+4)^2+y^2\}=9\{(x-1)^2+y^2\}$

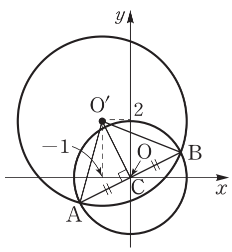
$x^2+y^2-10x-11=0\qquad \therefore\ (x-5)^2+y^2=36$

따라서 점 P의 자취는 중심이 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\times 6=12\pi$

답 $\boldsymbol{12\pi}$

1206 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=9$의 중심 O, O′에 대하여 $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



$(x+1)^2+(y-2)^2=9$에서

$x^2+y^2+2x-4y-4=0$이므로

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+2x-4y-4)=0$

$\therefore\ x-2y=0$

원 O'의 중심 O′$(-1,\ 2)$와 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{O'C}}=\dfrac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 O′AC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'C}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=4$

따라서 삼각형 O′AB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

답 $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

1207 점 $(2,\ 3)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=2^2$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9=4$

$\therefore\ x^2+y^2-4x-6y+9=0$

㉮

따라서 $a=-4$, $b=-6$, $c=9$이므로

㉯

$a+b+c=-1$

㉰

답 **−1**

단계	채점요소	배점
㉮	원의 방정식 구하기	60 %
㉯	$a,\ b,\ c$의 값 구하기	20 %
㉰	$a+b+c$의 값 구하기	20 %

1208 $x^2+y^2+2x-4=0$에서

$(x+1)^2+y^2=5$ ······ ㉠

원 $x^2+y^2-2ax+2y-6=0$이 원 ㉠의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉠의 중심 $(-1,\ 0)$을 지난다.

㉮

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4-(x^2+y^2-2ax+2y-6)=0$

$2(a+1)x-2y+2=0\qquad \therefore\ (a+1)x-y+1=0$

㉯

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$-(a+1)+1=0\qquad \therefore\ a=0$

㉰

답 **0**

단계	채점요소	배점
㉮	한 원이 다른 원의 둘레를 이등분하는 조건 알기	30 %
㉯	두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	50 %
㉰	a의 값 구하기	20 %

1209 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y+7+k(x^2+y^2-ax)=0$ (단, $k\neq-1$) ⋯⋯ ㉠

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉮

이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $2+k=0$ $\quad\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4x-6y+7-2(x^2+y^2-ax)=0$

$x^2+y^2+(4-2a)x+6y-7=0$

$\therefore \{x+(2-a)\}^2+(y+3)^2=a^2-4a+20$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉯

이 원의 넓이가 32π이므로

$a^2-4a+20=32,\ a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$ $\quad\therefore a=6\ (\because a>0)$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉰

답 **6**

단계	채점요소	배점
㉮	두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 세우기	20 %
㉯	두 원의 교점과 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식 구하기	40 %
㉰	a의 값 구하기	40 %

1210 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+4y=25$ $\quad\therefore 3x-4y+25=0$ ⋯⋯ ㉠

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉮

이 직선이 원 O에 접하므로 원 O의 중심 $(-6,\ 8)$과 직선 $3x-4y+25=0$ 사이의 거리는 원 O의 반지름의 길이와 같다.

즉, 원 O의 반지름의 길이는

$$\frac{|-18-32+25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{5}=5$$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉯

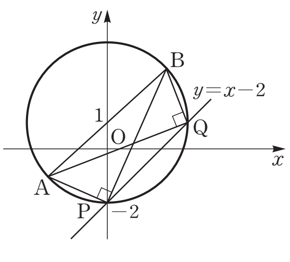
따라서 원 O의 넓이는 $\pi\times5^2=25\pi$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉰

답 **25π**

단계	채점요소	배점
㉮	접선의 방정식 구하기	30 %
㉯	원 O의 반지름의 길이 구하기	50 %
㉰	원 O의 넓이 구하기	20 %

1211 $\angle APB=\angle AQB=90^\circ$ 이므로 이를 원주각이라 생각할 때, 네 점 A, B, P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.



이 원의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\left(\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로

$\frac{1}{2}\sqrt{\{\sqrt{5}-(-\sqrt{5})\}^2+\{3-(-1)\}^2}=3$

따라서 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=9$

점 P, Q는 직선 $y=x-2$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 교점이므로

$x^2+(x-3)^2=9,\ 2x^2-6x=0$

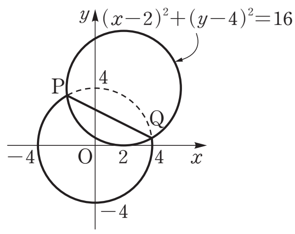
$x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $P(0,\ -2)$, $Q(3,\ 1)$이므로

$l^2=\overline{PQ}^2=(3-0)^2+\{1-(-2)\}^2=18$

답 **18**

1212 호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은



$(x-2)^2+(y-4)^2=16$

이때 선분 PQ는 두 원

$x^2+y^2=16,\ (x-2)^2+(y-4)^2=16$

의 공통인 현이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$

$\therefore x+2y-5=0$

답 ②

1213 $x^2+y^2-4x=0$에서 $(x-2)^2+y^2=4$

$\therefore C(2,\ 0)$

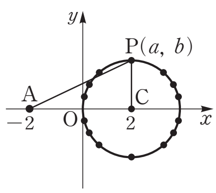
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 삼각형 ACP의 넓이를 n이라 하면

$\frac{1}{2}\times4\times|b|=n$ (단, $|b|\le2$)

$\therefore |b|=\frac{n}{2}$

$n=1,\ 2,\ 3$일 때, b는 각각 2개씩이므로 점 P는 각각 4개이고

$n=4$일 때, 점 P는 2개이다.



따라서 삼각형 ACP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는

$4\times3+2=14$

답 **14**

13 도형의 이동

교과서 문제 정/복/하/기

본문 171쪽, 173쪽

1214 $(-1+1,\ 0-1)$, 즉 $(0,\ -1)$ 답 $\mathbf{(0,\ -1)}$

1215 $(3+1,\ 2-1)$, 즉 $(4,\ 1)$ 답 $\mathbf{(4,\ 1)}$

1216 $(2+1,\ -2-1)$, 즉 $(3,\ -3)$ 답 $\mathbf{(3,\ -3)}$

1217 $(-3+1,\ -5-1)$, 즉 $(-2,\ -6)$ 답 $\mathbf{(-2,\ -6)}$

1218 $(3+2,\ 1-3)$, 즉 $(5,\ -2)$ 답 $\mathbf{(5,\ -2)}$

1219 $(-1+2,\ 5-3)$, 즉 $(1,\ 2)$ 답 $\mathbf{(1,\ 2)}$

1220 $(6+2,\ -2-3)$, 즉 $(8,\ -5)$ 답 $\mathbf{(8,\ -5)}$

1221 $(10+2,\ 7-3)$, 즉 $(12,\ 4)$ 답 $\mathbf{(12,\ 4)}$

1222 $x-4=4$, $y+6=5$이므로
$x=8$, $y=-1$ $\quad\therefore (8,\ -1)$ 답 $\mathbf{(8,\ -1)}$

1223 $x-4=0$, $y+6=7$이므로
$x=4$, $y=1$ $\quad\therefore (4,\ 1)$ 답 $\mathbf{(4,\ 1)}$

1224 $x-4=6$, $y+6=-8$이므로
$x=10$, $y=-14$ $\quad\therefore (10,\ -14)$ 답 $\mathbf{(10,\ -14)}$

1225 $x-4=-3$, $y+6=-10$이므로
$x=1$, $y=-16$ $\quad\therefore (1,\ -16)$ 답 $\mathbf{(1,\ -16)}$

1226 $-1+a=1$, $1+b=-2$이므로
$a=2$, $b=-3$ 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

1227 $(x-3)-4(y+5)+3=0$
$\therefore x-4y-20=0$ 답 $\boldsymbol{x-4y-20=0}$

1228 $y+5=2(x-3)^2+5(x-3)+2$
$\therefore y=2x^2-7x$ 답 $\boldsymbol{y=2x^2-7x}$

1229 $\{(x-3)-2\}^2+\{(y+5)+1\}^2=6$
$\therefore (x-5)^2+(y+6)^2=6$ 답 $\boldsymbol{(x-5)^2+(y+6)^2=6}$

1230 $y+1=-2(x-2)-3$
$\therefore y=-2x$ 답 $\boldsymbol{y=-2x}$

1231 $y+1=-(x-2)^2+4$
$\therefore y=-x^2+4x-1$ 답 $\boldsymbol{y=-x^2+4x-1}$

1232 $\{(x-2)+2\}^2+\{(y+1)-1\}^2=1$
$\therefore x^2+y^2=1$ 답 $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

1233 주어진 직선을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
$(x-5)+(y+4)-6=0$
$\therefore x+y-7=0$ 답 $\boldsymbol{x+y-7=0}$

1234 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$가 평행이동
$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=5$
$\therefore (x-a-1)^2+(y-b+2)^2=5$
이 원이 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로
$-a-1=-5$, $-b+2=3$
$\therefore a=4$, $b=-1$ 답 $\boldsymbol{a=4,\ b=-1}$

1235 $(x-3)+3(y+6)+5=0$
$\therefore x+3y+20=0$ 답 $\boldsymbol{x+3y+20=0}$

1236 주어진 포물선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은
$y-5=-(x-2)^2$
$\therefore y=-x^2+4x+1$ 답 $\boldsymbol{y=-x^2+4x+1}$

1237 답 (1) $\mathbf{(-1,\ -3)}$ (2) $\mathbf{(1,\ 3)}$ (3) $\mathbf{(1,\ -3)}$
(4) $\mathbf{(3,\ -1)}$ (5) $\mathbf{(-3,\ 1)}$

1238 (1) $x-(-y)+8=0$ $\quad\therefore x+y+8=0$
(2) $-x-y+8=0$ $\quad\therefore x+y-8=0$
(3) $-x-(-y)+8=0$ $\quad\therefore x-y-8=0$
(4) $y-x+8=0$ $\quad\therefore x-y-8=0$
(5) $-y-(-x)+8=0$ $\quad\therefore x-y+8=0$
답 (1) $\boldsymbol{x+y+8=0}$ (2) $\boldsymbol{x+y-8=0}$ (3) $\boldsymbol{x-y-8=0}$
(4) $\boldsymbol{x-y-8=0}$ (5) $\boldsymbol{x-y+8=0}$

1239 (1) $-y=x^2-x+2$ $\quad\therefore y=-x^2+x-2$
(2) $y=(-x)^2-(-x)+2$ $\quad\therefore y=x^2+x+2$
(3) $-y=(-x)^2-(-x)+2$ $\quad\therefore y=-x^2-x-2$

(4) $x=y^2-y+2$

(5) $-x=(-y)^2-(-y)+2 \qquad \therefore x=-y^2-y-2$

답 (1) $\boldsymbol{y=-x^2+x-2}$ (2) $\boldsymbol{y=x^2+x+2}$ (3) $\boldsymbol{y=-x^2-x-2}$ (4) $\boldsymbol{x=y^2-y+2}$ (5) $\boldsymbol{x=-y^2-y-2}$

1240 (1) $(x+1)^2+(-y-5)^2=36$

$\therefore (x+1)^2+(y+5)^2=36$

(2) $(-x+1)^2+(y-5)^2=36$

$\therefore (x-1)^2+(y-5)^2=36$

(3) $(-x+1)^2+(-y-5)^2=36$

$\therefore (x-1)^2+(y+5)^2=36$

(4) $(y+1)^2+(x-5)^2=36$

$\therefore (x-5)^2+(y+1)^2=36$

(5) $(-y+1)^2+(-x-5)^2=36$

$\therefore (x+5)^2+(y-1)^2=36$

답 (1) $\boldsymbol{(x+1)^2+(y+5)^2=36}$ (2) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-5)^2=36}$ (3) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y+5)^2=36}$ (4) $\boldsymbol{(x-5)^2+(y+1)^2=36}$ (5) $\boldsymbol{(x+5)^2+(y-1)^2=36}$

1241 $\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 5)$ 답 $\boldsymbol{(2, 5)}$

1242 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-2-10}{2}\right)$, 즉 $(5, -6)$ 답 $\boldsymbol{(5, -6)}$

1243 $\left(\frac{-5-9}{2}, \frac{9+5}{2}\right)$, 즉 $(-7, 7)$ 답 $\boldsymbol{(-7, 7)}$

1244 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1+a}{2}=-2, \frac{4+b}{2}=2 \qquad \therefore a=-5, b=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-5, 0)$ 답 $\boldsymbol{(-5, 0)}$

1245 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-2+a}{2}=1, \frac{-5+b}{2}=-3 \qquad \therefore a=4, b=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4, -1)$ 답 $\boldsymbol{(4, -1)}$

1246 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{3+a}{2}=5, \frac{-6+b}{2}=-2 \qquad \therefore a=7, b=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(7, 2)$ 답 $\boldsymbol{(7, 2)}$

1247 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로

$\frac{a+p}{2}=-2, \frac{b+q}{2}=-1$

$\therefore a=-p-4, b=-q-2$

(2) 점 (a, b)가 직선 $3x-y-2=0$ 위의 점이므로

$3a-b-2=0$

이 식에 $a=-p-4$, $b=-q-2$를 대입하면

$3(-p-4)-(-q-2)-2=0$

$\therefore 3p-q+12=0$

따라서 점 (p, q)는 직선 $3x-y+12=0$ 위의 점이므로 구하는 직선의 방정식은 $3x-y+12=0$

답 (1) $\boldsymbol{a=-p-4, b=-q-2}$ (2) $\boldsymbol{3x-y+12=0}$

1248 (1) $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$

(2) 두 점 A, B를 지나는 직선은 직선 $x-y+1=0$과 수직이다. 직선 $x-y+1=0$의 기울기가 1이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

(3) 선분 AB의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{3+a}{2}-\frac{-1+b}{2}+1=0$

$\therefore a-b=-6$ ······ ㉠

또, 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\frac{b+1}{a-3}=-1 \qquad \therefore a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, 4)$

답 (1) $\boldsymbol{\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)}$ (2) $\boldsymbol{-1}$ (3) $\boldsymbol{(-2, 4)}$

1249 점 $\mathrm{P}(5, -4)$를 직선 $x-3y-7=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(p, q)$라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5+p}{2}, \frac{-4+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-3y-7=0$ 위의 점이므로

$\frac{5+p}{2}-3\times\frac{-4+q}{2}-7=0$

$\therefore p-3q=-3$ ······ ㉠

또, 직선 PQ는 직선 $x-3y-7=0$과 수직이고 직선 $x-3y-7=0$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 직선 PQ의 기울기는 -3이다. 즉, $\frac{q+4}{p-5}=-3$이므로 $3p+q=11$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, 2)$ 답 $\boldsymbol{(3, 2)}$

유형 익히기

본문 174~179쪽

1250 점 $(-3, 2)$를 점 $(1, -4)$로 옮기는 평행이동을 $(x, y) \to (x+m, y+n)$이라 하면

$-3+m=1,\ 2+n=-4$

$\therefore m=4,\ n=-6$

이때 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-6)$에 의하여 점 $(5,\ -2)$로 옮겨지는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a+4=5,\ b-6=-2$

$\therefore a=1,\ b=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 4)$이다. 답 **(1, 4)**

1251 점 $(-1,\ 3)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-3,\ y+2)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1-3,\ 3+2)$, 즉 $(-4,\ 5)$

이 점이 직선 $y=mx-7$ 위의 점이므로

$5=-4m-7 \qquad \therefore m=-3$ 답 ②

1252 주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$-2+m=1,\ a+n=4,\ b+m=5,\ 6+n=10$

따라서 $m=3,\ n=4$이므로

$a=0,\ b=2$

따라서 점 $(0,\ 2)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(0+3,\ 2+4)$, 즉 $(3,\ 6)$ 답 **(3, 6)**

1253 점 $\mathrm{A}(-1,\ 7)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는

$(-1+a,\ 7+3)$, 즉 $(-1+a,\ 10)$

이때 $\overline{\mathrm{OA}'}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}'}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로

$(-1+a)^2+10^2=4\{(-1)^2+7^2\}$

$a^2-2a-99=0,\ (a+9)(a-11)=0$

$\therefore a=11\ (\because a>0)$ 답 **11**

1254 직선 $ax-2y-a+1=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-4)-2(y-n)-a+1=0$

$\therefore ax-2y-5a+2n+1=0$

이 직선이 직선 $3x-2y-6=0$과 일치하므로

$a=3,\ -5a+2n+1=-6$

따라서 $a=3,\ n=4$이므로 $a+n=7$ 답 ⑤

1255 점 $(2,\ 1)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮겨진 점이 $(3,\ 4)$이므로

$2+a=3,\ 1+b=4 \qquad \therefore a=1,\ b=3$

따라서 직선 $3x-2y+4=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-1)-2(y-3)+4=0 \qquad \therefore 3x-2y+7=0$

이 직선이 점 $(3,\ c)$를 지나므로

$3\times3-2c+7=0 \qquad \therefore c=8$

$\therefore a+b+c=12$ 답 **12**

1256 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=a(x+1)+b \qquad \therefore y=ax+a+b+2$

이 직선이 직선 $y=2x+1$과 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이고 y절편이 1로 같아야 한다.

즉, $a\times2=-1,\ a+b+2=1$에서

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a-b=0$ 답 **0**

1257 직선 $y=x-3$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+2=(x-m)-3 \qquad \therefore y=x-m-5$ …… ㉠

㉮

직선 $y=-x-1$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=-x-1 \qquad \therefore y=-x+n-1$ …… ㉡

㉯

이때 두 직선 ㉠, ㉡이 모두 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$-2=4-m-5$에서 $m=1$

$-2=-4+n-1$에서 $n=3$

㉰

$\therefore m+n=4$

㉱

답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	직선 $y=x-3$을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
㉯	직선 $y=-x-1$을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
㉰	$m,\ n$의 값 구하기	30 %
㉱	$m+n$의 값 구하기	10 %

1258 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x-3)^2+y^2=1$이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-a-3)^2+(y+b)^2=1$

이 원이 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 즉

$(x+1)^2+(y-2)^2=1$과 일치하므로

$-a-3=1,\ b=-2 \qquad \therefore a=-4,\ b=-2$

$\therefore ab=8$ 답 **8**

1259 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=5$

이때 평행이동하여 이 원과 겹쳐지려면 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$로 같

아야 한다.

ㄱ. 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$는 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

ㄴ. 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$는 반지름의 길이가 3이므로 평행이동해도 주어진 원과 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2+6x+4y+8=0$에서

$(x+3)^2+(y+2)^2=5$

따라서 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

따라서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄷ**

1260 원점을 점 $(2,\ 1)$로 옮기는 평행이동은

$(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y+1)$

포물선 $y=x^2+6x+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x-2)^2+6(x-2)+1$

$y=x^2+2x-6 \qquad \therefore\ y=(x+1)^2-7$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -7)$이므로

$m=-1,\ n=-7$

$\therefore\ m+n=-8$ 답 **-8**

다른풀이 $y=x^2+6x+1$에서 $y=(x+3)^2-8$이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -8)$이다.

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3,\ -8)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-3+2,\ -8+1)$, 즉 $(-1,\ -7)$이므로

$m=-1,\ n=-7$

$\therefore\ m+n=-8$

1261 포물선 $y=4x^2+8x-5$, 즉 $y=4(x+1)^2-9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+2$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a-2=4(x-a+1)^2-9$

$\therefore\ y=4(x-a+1)^2+a-7$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-1,\ a-7)$이 x축 위에 있으므로

$a-7=0 \qquad \therefore\ a=7$

따라서 꼭짓점의 x좌표는 $7-1=6$ 답 **6**

1262 직선 $y=3x-1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2a=3(x-a)-1 \qquad \therefore\ y=3x-a-1$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(1,\ -2)$를 지나야 하므로

$-2=3-a-1 \qquad \therefore\ a=4$ 답 **4**

1263 원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=1$

이 원이 직선 $4x+3y+2=0$과 접하므로 원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $4x+3y+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같다.

즉, $\dfrac{|0+3a+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$이므로 $|3a+2|=5$

$3a+2=\pm5 \qquad \therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$ 답 **1**

1264 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=3(x-k)+2 \qquad \therefore\ y=3x-3k+4$

이 직선이 포물선 $y=4x^2-5x-1$에 접하므로 이차방정식 $3x-3k+4=4x^2-5x-1$, 즉 $4x^2-8x+3k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=16-4(3k-5)=0$

$-12k+36=0 \qquad \therefore\ k=3$ 답 ③

1265 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=16$이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=16$

이 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 이 원이 x축과 y축에 모두 접하므로

$a-2=4,\ b+3=4 \qquad \therefore\ a=6,\ b=1$

$\therefore\ a+b=7$ 답 **7**

1266 점 $P(2,\ -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(-1,\ 2)$

점 $P(2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(2,\ 1)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+(-1)+2}{3},\ \dfrac{-1+2+1}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 답 $\left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$

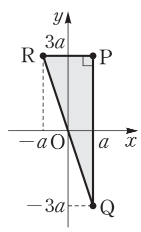
1267 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$b=3a \qquad \therefore\ P(a,\ 3a)$

점 $P(a,\ 3a)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(a,\ -3a)$

점 $P(a,\ 3a)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(-a,\ 3a)$

따라서 오른쪽 그림에서



$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$

$=\dfrac{1}{2}\times6a\times2a=6a^2$

즉, $6a^2=54$이므로 $a^2=9$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 **3**

1268 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(a, -b)$
이 점이 제3사분면 위의 점이므로 $a<0,\ -b<0$
$\therefore a<0,\ b>0$
점 $(a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a+b, -ab)$
이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a+b, ab)$
이때 $a<0,\ b>0$이므로 $-a+b>0,\ ab<0$
따라서 점 $(-a+b, ab)$는 제4사분면 위에 있다.

답 **제4사분면**

1269 $P(-2, -1) \xrightarrow{(가)} (-2, 1) \xrightarrow{(나)} (2, -1) \xrightarrow{(다)} (-2, -1)$
즉, 점 P를 (가)→(나)→(다)의 순서로 대칭이동하면 자기자신으로 돌아온다.
따라서 $100=3\times33+1$에서 99번 이동한 후의 점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로 100번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, 1)$이다. 따라서 $a=-2,\ b=1$이므로
$a-b=-3$

답 **−3**

1270 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+2$
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 기울기가 3이고 점 $(-6, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-2=3(x+6) \qquad \therefore y=3x+20$

답 $\boldsymbol{y=3x+20}$

1271 직선 $x+5y-6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은
$y+5x-6=0 \qquad \therefore 5x+y-6=0$
직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은
$-5x-y-6=0 \qquad \therefore y=-5x-6$
따라서 직선 l_2의 기울기는 -5이다.

답 **−5**

1272 점 $(4, -7)$을 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(4, 7)$로 옮겨지므로 직선 $2x-3y+5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$2x-3(-y)+5=0 \qquad \therefore 2x+3y+5=0$

답 ①

1273 중심이 점 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+2)^2=k^2$
이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-3)^2+(-y+2)^2=k^2$
$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=k^2$
이 원이 점 $(3, -3)$을 지나므로
$(3-3)^2+(-3-2)^2=k^2$
$\therefore k=5\ (\because k>0)$

답 **5**

1274 $x^2+y^2-2ax-6y+4=0$에서
$(x-a)^2+(y-3)^2=a^2+5$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x-a)^2+(y-3)^2=a^2+5$
$\therefore (x+a)^2+(y-3)^2=a^2+5$
이 원의 중심 $(-a, 3)$이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 위에 있으므로
$3=-\frac{1}{2}\times(-a)+\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}=\frac{5}{2}$
$\therefore a=5$

답 ③

1275 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=(-x)^2+a(-x)+b$
$y=-x^2+ax-b \qquad \therefore y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$
이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(-2, 7)$과 일치하므로
$\frac{a}{2}=-2,\ \frac{a^2}{4}-b=7 \qquad \therefore a=-4,\ b=-3$
$\therefore a+b=-7$

답 ②

1276 $x^2+y^2-4x+10y-5=0$에서
$(x-2)^2+(y+5)^2=34$
이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y-2)^2+(x+5)^2=34 \qquad \therefore (x+5)^2+(y-2)^2=34$
이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는
$(0+5)^2+(y-2)^2=34$에서 $(y-2)^2=9$
$y-2=\pm3 \qquad \therefore y=-1$ 또는 $y=5$
따라서 두 점 사이의 거리는
$5-(-1)=6$

답 **6**

1277 직선 $4x+3y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$4(-x)+3(-y)+a=0 \qquad \therefore 4x+3y-a=0$
이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$에 접하므로 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다.
즉, $\frac{|12-3-a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$이므로 $|9-a|=15$
$9-a=\pm15 \qquad \therefore a=24\ (\because a>0)$

답 ④

1278 원 $x^2+y^2-4x-2y=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+(-y)^2-4x-2(-y)=0$
$x^2+y^2-4x+2y=0 \qquad \therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5$

가

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로

$$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$$

························ ㉯

$|k+3|<\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}<k+3<\sqrt{10}$

$\therefore -3-\sqrt{10}<k<-3+\sqrt{10}$

························ ㉰

답 $\mathbf{-3-\sqrt{10}<k<-3+\sqrt{10}}$

단계	채점요소	배점
㉮	대칭이동한 원의 방정식 구하기	30 %
㉯	원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 조건 구하기	50 %
㉰	k의 값의 범위 구하기	20 %

1279 원 $(x-a)^2+(y+1)^2=9$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2+(-y+1)^2=9$

$\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=9$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y+a)^2+(x-1)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y+a)^2=9$

이때 이 원의 넓이가 직선 $3x-2y+1=0$에 의하여 이등분되려면 이 직선이 원의 중심 $(1, -a)$를 지나야 하므로

$3+2a+1=0 \qquad \therefore a=-2$ 답 $\mathbf{-2}$

1280 포물선 $y=x^2+x+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x-2)^2+(x-2)+a$

$\therefore y=x^2-3x+a+1$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2-3x+a+1$

$\therefore y=-x^2+3x-a-1$

이 포물선이 $y=-x^2+3x+6$과 일치하므로

$-a-1=6 \qquad \therefore a=-7$ 답 $\mathbf{-7}$

1281 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+1, b+2)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+1, -b-2)$

이 점이 $(-3, 2)$와 일치하므로

$a+1=-3$, $-b-2=2 \qquad \therefore a=-4$, $b=-4$

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, -4)$이다. 답 $\mathbf{(-4, -4)}$

1282 원 $(x+2)^2+(y+2)^2=16$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1+2)^2+(y+2)^2=16 \qquad \therefore (x+3)^2+(y+2)^2=16$

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y+3)^2+(-x+2)^2=16 \qquad \therefore (x-2)^2+(y-3)^2=16$

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(x-2)^2+(0-3)^2=16$에서 $(x-2)^2=7$

$x-2=\pm\sqrt{7} \qquad \therefore x=2+\sqrt{7}$ 또는 $x=2-\sqrt{7}$

따라서 이 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(2-\sqrt{7}, 0)$, $(2+\sqrt{7}, 0)$이므로

$\overline{PQ}=(2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$ 답 ②

1283 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=16$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-p)^2+(-y-q)^2=16$

$\therefore (x-p)^2+(y+q)^2=16$

이 원을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-p)^2+(y-3+q)^2=16$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|p|=|3-q|=4 \qquad \therefore p=4$, $q=7$ $(\because p>0, q>0)$

$\therefore p+q=11$ 답 **11**

1284 두 점 $(a, 8)$, $(-6, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-4, 6)$이므로

$\frac{a-6}{2}=-4$, $\frac{8+b}{2}=6 \qquad \therefore a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$ 답 ④

1285 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

원의 중심 $(1, -3)$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1+a}{2}=2$, $\frac{-3+b}{2}=1 \qquad \therefore a=3$, $b=5$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 $(3, 5)$이고 반지름의 길이가 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-5)^2=9$ 답 ①

1286 포물선 $y=x^2-2x+3$, 즉 $y=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-5$, 즉 $y=-(x-3)^2+4$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 4)$

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 3)$ 답 $(2, 3)$

1287 직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하면
두 점 $P(1, 5)$, $Q(3, 3)$에 대하여 $\overline{PQ}$의 중점 $(2, 4)$가 직선 l 위의 점이므로

$4=2a+b$ …… ㉠

또, 직선 PQ가 직선 l과 수직이므로

$\frac{3-5}{3-1}\times a=-1 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$
따라서 직선 l의 방정식은 $y=x+2$
이때 직선 l의 x절편은 -2, y절편은 2이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$ 답 2

1288 두 점 $(-6, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점
$\left(\frac{-6+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $2x+y+3=0$ 위의 점이므로

$2\times\frac{-6+a}{2}+\frac{-1+b}{2}+3=0$

$\therefore 2a+b=7$ …… ㉠

또, 두 점 $(-6, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$과 수직이므로

$\frac{b+1}{a+6}\times(-2)=-1$

$\therefore a-2b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$
$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

1289 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=5$의 중심 $(-2, -1)$을 직선 $y=x-2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면
두 점 $(-2, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점
$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$\frac{-1+b}{2}=\frac{-2+a}{2}-2 \qquad \therefore a-b=5$ …… ㉠

또, 두 점 $(-2, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=x-2$와 수직이므로

$\frac{b+1}{a+2}\times1=-1 \qquad \therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=-4$
원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 $(1, -4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+4)^2=5$ 답 $(x-1)^2+(y+4)^2=5$

1290 두 원의 중심은 각각 $(0, 0)$, $(2, -4)$이고 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $(1, -2)$가 직선 $ax+by+5=0$ 위의 점이므로 $a-2b+5=0$ …… ㉠

㉮

또, 두 점 $(0, 0)$, $(2, -4)$를 지나는 직선이 직선 $ax+by+5=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{5}{b}$와 수직이므로

$\frac{-4-0}{2-0}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1 \qquad \therefore b=-2a$ …… ㉡

㉯

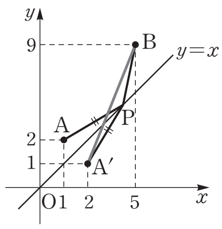
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$
$\therefore a+b=1$

㉰

답 1

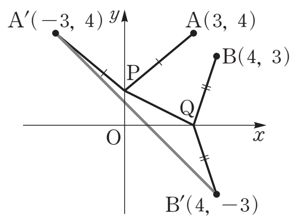
단계	채점요소	배점
㉮	두 원의 중심을 이은 선분의 중점이 직선 위의 점임을 알기	40%
㉯	두 원의 중심을 지나는 직선이 주어진 직선과 수직임을 알기	40%
㉰	$a+b$의 값 구하기	20%

1291 점 $A(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
$A'(2, 1)$



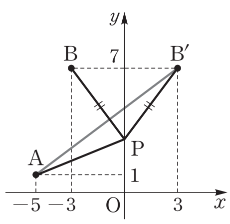
$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$
$\geq\overline{A'B}$
$=\sqrt{(5-2)^2+(9-1)^2}$
$=\sqrt{73}$ 답 ③

1292 점 $A(3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $A'(-3, 4)$
점 $B(4, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
$B'(4, -3)$



$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{(4+3)^2+(-3-4)^2}$
$=7\sqrt{2}$ 답 ②

1293 점 $B(-3, 7)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
$B'(3, 7)$



$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$
$\geq\overline{AB'}$
$=\sqrt{(3+5)^2+(7-1)^2}$
$=10$

이때 두 점 A$(-5, 1)$, B$'(3, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{7-1}{3-(-5)}(x+5)$

$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소일 때의 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{19}{4}\right)$이다.

답 **최솟값: 10, 점 P의 좌표: $\left(0, \frac{19}{4}\right)$**

유형 up

본문 180쪽

1294 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 ④이다. 답 ④

다른풀이 주어진 도형은 세 직선

$x=0, y=x, y=1$ …… ㉠

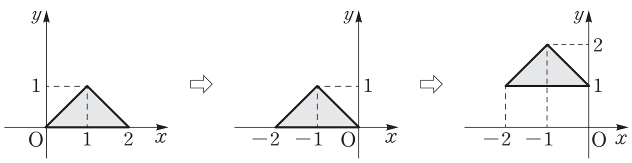
로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$y=0, x=y, x=1$

따라서 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 $y=0$, $x=y$, $x=1$로 둘러싸인 도형이므로 ④이다.

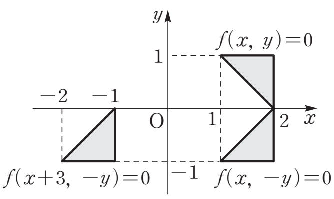
1295 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(-x, y)=0$이고, 이것을 다시 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(-x, y-1)=0$이다.



따라서 방정식 $f(-x, y-1)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

답 ③

1296 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$이고, 이것을 다시 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $f(x+3, -y)=0$이다.



따라서 $g(x, y)=f(x+3, -y)$이다. 답 ③

시험에 꼭 나오는 문제

본문 181~182쪽

1297 점 $(4, -1)$이 평행이동 $(x, y) \to (x+a, y-2)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(4+a, -1-2)$, 즉 $(a+4, -3)$

이 점이 점 $(2, b)$와 일치하므로

$a+4=2, -3=b \qquad \therefore a=-2, b=-3$

$\therefore a+b=-5$ 답 ①

1298 직선 $y=3x-4$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=3(x-m)-4$

$\therefore 3x-y-3m-7=0$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=3x-4$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이고 두 직선이 평행하므로 직선 $y=3x-4$ 위의 점 $(0, -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

즉, $\frac{|0+4-3m-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$이므로 $|3m+3|=10$

$3m+3=\pm 10 \qquad \therefore m=\frac{7}{3} \ (\because m>0)$ 답 $\frac{7}{3}$

1299 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+3-2)^2+(y-1+1)^2=5-a$

$\therefore (x+1)^2+y^2=5-a$

따라서 중심의 좌표가 $(-1, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$이므로

$b=0, \sqrt{5-a}=3 \qquad \therefore a=-4, b=0$

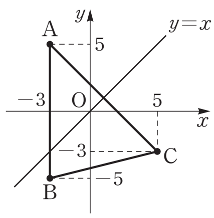
$\therefore a+b=-4$ 답 ①

1300 점 A$(-3, 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(-3, -5)$

점 A$(-3, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 $(5, -3)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 8=40$



답 **40**

1301 ㄱ. $x^2+y^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y^2+x^2=1 \qquad \therefore x^2+y^2=1$

ㄴ. $y=-x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=-y \qquad \therefore y=-x$

ㄷ. $y=2x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=2y \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x$

따라서 처음의 도형과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1302 직선 $y=2x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=2(-x)+k \qquad \therefore 2x-y-k=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=10$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같다.

즉, $\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$이므로 $|k|=5\sqrt{2}$

$\therefore k=5\sqrt{2}\ (\because k>0)$

답 ⑤

1303 점 $(-2,\ 5)$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $(2,\ -5)$

점 $(2,\ -5)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $(2+3,\ -5-2)$, 즉 $(5,\ -7)$

점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(-7,\ 5)$

따라서 $a=-7$, $b=5$이므로 $a+b=-2$

답 **−2**

1304 포물선 $y=x^2+2x+3$, 즉 $y=(x+1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-13$, 즉 $y=-(x-3)^2-4$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$

두 꼭짓점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ -4)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$a=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $b=\dfrac{2-4}{2}=-1$

$\therefore ab=-1$

답 **−1**

1305 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

$x^2+y^2-6x-12y+41=0$에서

$(x-3)^2+(y-6)^2=4$

두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$가 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$2a+b=4$ …… ㉠

두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\dfrac{6-2}{3-1}\times a=-1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

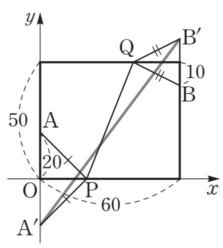
$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore a+b=\dfrac{9}{2}$

답 $\dfrac{9}{2}$

1306 오른쪽 그림과 같이 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내고 처음 다람쥐의 위치를 A, 움직인 후의 다람쥐의 위치를 B라 하면

A$(0,\ 20)$, B$(60,\ 40)$



점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 A′$(0,\ -20)$

점 B를 직선 $y=50$에 대하여 대칭이동한 점은 B′$(60,\ 60)$

이때 다람쥐가 x축의 벽면을 거치는 지점을 P, x축에 평행한 벽면을 거치는 지점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$

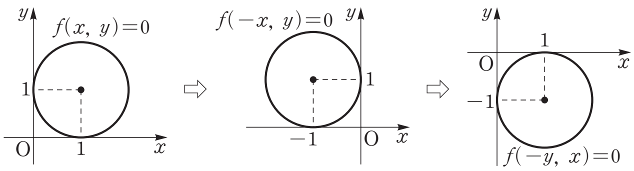
$=\sqrt{(60-0)^2+(60+20)^2}$

$=100$

따라서 다람쥐가 움직인 최단 거리는 100 m이다.

답 **100 m**

1307 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ y)=0$이고, 이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(-y,\ x)=0$이다.



따라서 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

답 ①

참고 원의 중심이 이동한 점의 좌표를 생각한다.

$(1,\ 1)\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}(-1,\ 1)\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y=x\text{에 대하여}}(1,\ -1)$

1308 주어진 평행이동을 $(x,\ y)\longrightarrow(x+m,\ y+n)$이라 하면 $a+m=6$, $3+n=-2$, $-2+m=1$, $b+n=4$

따라서 $m=3$, $n=-5$이므로

…… ㉮

$a=3$, $b=9$

…… ㉯

따라서 점 $(b,\ a)$, 즉 점 $(9,\ 3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(9+3,\ 3-5)$, 즉 $(12,\ -2)$

…… ㉰

답 **(12, −2)**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 조건을 만족시키는 평행이동 구하기	40 %
㉯	a, b의 값 구하기	30 %
㉰	점 $(b,\ a)$가 옮겨지는 점의 좌표 구하기	30 %

1309 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y+a)^2+(x+b)^2=9 \qquad \therefore (x+b)^2+(y+a)^2=9$

…… ㉮

이 원을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2+b)^2+(y+a)^2=9$

…… ㉯

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-2-b|=|-a|=3$

$|-2-b|=3$에서 $-2-b=\pm3$

$\therefore b=-5$ 또는 $b=1$

$|-a|=3$에서 $-a=\pm3$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

.... ㉰

따라서 ab의 최댓값은 15이다.

.... ㉱

답 **15**

단계	채점요소	배점
㉮	직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식 구하기	20 %
㉯	평행이동한 원의 방정식 구하기	20 %
㉰	a, b의 값 구하기	40 %
㉱	ab의 최댓값 구하기	20 %

1310 점 A를 직선 $4x-6y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하자.

두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$를 이은 선분의 중점

$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$이 직선 $4x-6y+3=0$ 위의 점이므로

$4\times\frac{a+1}{2}-6\times\frac{b-1}{2}+3=0$

$\therefore 2a-3b=-8$ ······ ㉠

두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$를 지나는 직선이 직선

$4x-6y+3=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$과 수직이므로

$\frac{b+1}{a-1}\times\frac{2}{3}=-1$

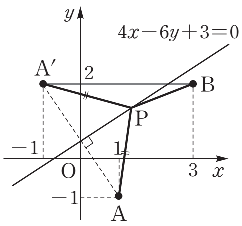
$\therefore 3a+2b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

따라서 점 A′의 좌표는 $(-1, 2)$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AP}+\overline{PB}&=\overline{A'P}+\overline{PB}\\&\geq\overline{A'B}\\&=\sqrt{(3+1)^2+(2-2)^2}\\&=4\end{aligned}$$



$\therefore k=4$

이때 직선 A′B의 방정식은

$y-2=\frac{2-2}{3+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=2$

$y=2$를 $4x-6y+3=0$에 대입하면 $x=\frac{9}{4}$

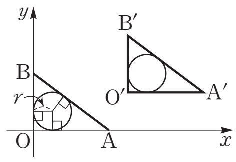
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최소일 때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{4}, 2\right)$이므로

$s=\frac{9}{4}$, $t=2$

$\therefore kst=4\times\frac{9}{4}\times2=18$

답 **18**

1311 두 삼각형 OAB, O′A′B′에 내접하는 원을 각각 C, C'이라 하자.



원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제 1 사분면 위에 있으므로 중심의 좌표는 (r, r)이다.

또, 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$에 대하여 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ $\quad\therefore 3x+4y-12=0$

이때 원 C가 직선 AB에 접하므로 원의 중심 (r, r)와 직선 AB 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.

즉, $\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$이므로 $|7r-12|=5r$

$7r-12=\pm5r$ $\quad\therefore r=1$ ($\because 0<r<3$)

중심이 점 $(1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

한편, 점 $A(4, 0)$을 점 $A'(9, 2)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이므로 원 C : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 C'의 방정식은

$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1$

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

$\therefore x^2+y^2-12x-6y+44=0$

따라서 $a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로

$a+b+c=26$

답 **26**

memo

memo